解答　総合問題

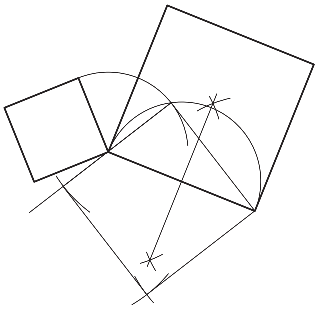
1　$\dfrac{5}{12}$

⇒　目の出方の場合の数は全部で36通りあり，そのどれが起こることも同様に確からしい。このうち，点Pがおうぎ形OABの内部または周上にある場合の数は，次の15通りである。

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),
(4, 1), (4, 2), (4, 3)

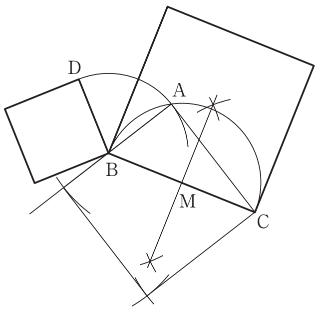
したがって，求める確率は$\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

2（例）



⇒　三平方の定理，すなわち,「直角三角形の直角をはさむ２辺の長さをそれぞれ１辺とする正方形の面積の和は，斜辺を１辺とする正方形の面積の和に等しい」ことを利用して，次の①～④の手順で作図する。

①　右の図で，BCの垂直二等分線をひき，BCの中点をMとする。



②　点Mを中心に，MBを半径とする半円をかく。

③　点Bを中心にBDを半径とする円をかき，②の半円との交点をAとする。このとき，∠BAC＝90°となる。

④　辺ACを１辺とする正方形をかく。

3(1)　$a=1$

(2)　$y=x+6$

(3)　〈証明〉

(△MPC と △MQOにおいて,)

点Cは(0, 6)，点Mは(0, 3)の点だから，

MC＝MO　……①

対頂角は等しいので，

∠CMP＝∠OMQ　……②

また，直線BCと直線OAは平行だから，錯角は等しいので，

∠PCM＝∠QOM　……③

①，②，③より，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

(　△MPC≡△MQO　)

(4)（例）

直線MDと②のグラフとの交点をRとすると，(3)より，△MDC≡△MROとなり，△MDC＝△MRO

また，四角形OADC＝四角形OADM＋△MDC

△ADR＝四角形OADM＋△MRO

したがって，四角形OADC＝△ADRとなる。

よって，直線MDと②のグラフとの交点の座標を求めればよい。

点Dは，直線BDと①のグラフとの交点だから，二次方程式$x+6=\dfrac{1}{3}x^2$より，$x=-3$, $x=6$であり，点Dのx座標は正の数だから，D(6, 12)

直線MDは，２点(0, 3)，(6, 12)を通るから，$y=\dfrac{3}{2}x+3$と表せる。

したがって，直線MDと②のグラフとの交点のx座標は，方程式$\dfrac{3}{2}x+3=x$より，$x=-6$

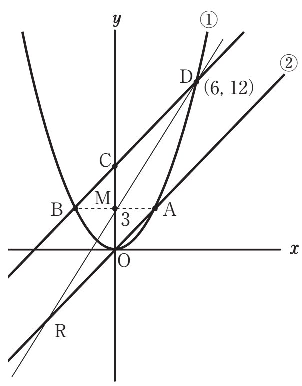
よって，求める点Rの座標は，(−6, −6)

⇒(2)　求める直線の式は，傾きが１だから，$y=x+b$と表すことができる。この直線は点B(−3, 3)を通るから，$3=-3+b$　　$b=6$

したがって，$y=x+6$

(3)　直線BCと②のグラフは平行であることに着目する。

(4)　(3)で，点Pが点Dに一致する場合を考えると，(3)の結果から，そのときの点Qが点Rとなる。つまり，直線MDと②のグラフの交点が点Rになる。

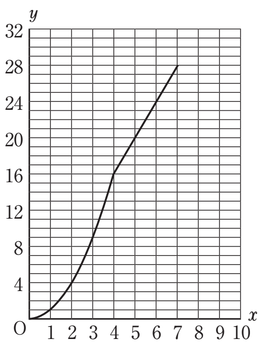


4(1)　７秒後

(2)①　$y=x^2$

②　右の図

(3)　$y=16$



(4)　三角すいP－ABDの体積は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times(14-2x)=28-4x\ (\mathrm{cm}^3)$$

三角すいP－EFQの体積 y は，

$0\leqq x\leqq4$ のとき $y=x^2\ (\mathrm{cm}^3)$，

$4\leqq x\leqq7$ のとき $y=4x\ (\mathrm{cm}^3)$

であるから，

(ア)　$0\leqq x\leqq4$ のとき，

$$x^2=28-4x \qquad x^2+4x-28=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{128}}{2}=-2\pm4\sqrt{2}$$

$0\leqq x\leqq4$ より，$x=-2+4\sqrt{2}$

(イ)　$4\leqq x\leqq7$ のとき，

$$4x=28-4x \qquad 8x=28 \qquad x=\frac{7}{2}$$

$4\leqq x\leqq7$ より不適

答　$-2+4\sqrt{2}$（秒後）

⇒(2)①　$y=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times x\right)\times2x$ から，$y=x^2$

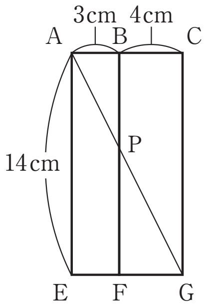
②　$0\leqq x\leqq4$ のとき，

①から，$y=x^2$

$4\leqq x\leqq7$ のとき，

$y=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times4\right)\times2x$ から，$y=4x$

(3)　AP＋PGの長さが最も短くなるのは，右の展開図で，点Pが長方形AEGCの対角線AGとBFの交点にある場合である。△AEGで，AE：PF＝EG：FGから，

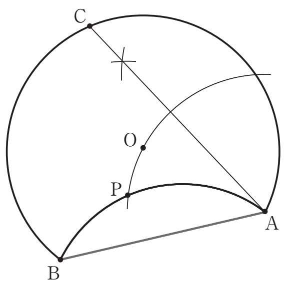


$$14:\mathrm{PF}=7:4 \qquad \mathrm{PF}=8$$

よって，$x=8\div2=4$

したがって，$y=4^2=16$

5 (1)　(例)

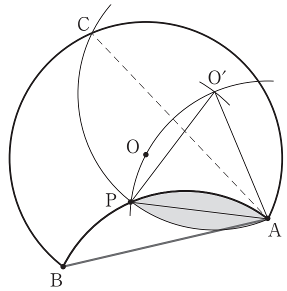


(2)　$\left(\dfrac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$

⇒(1)　点Aからの距離が2点A，P間の距離と等しい円Oの周上の点を見つける。その点と点Pを結んだ線分の垂直二等分線が折り目になる。

(2)　線分ACを折り目として折り返した弧の半径は円Oの半径と同じ2cmだから，その中心は次の図のような正三角形O′PAの頂点O′と一致する。

おうぎ形O′PAの面積は，



$$\pi\times2^2\times\frac{60}{360}=\frac{2}{3}\pi$$

△O′PAは1辺が2cmの正三角形だから，その面積は，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$$

したがって，求める図形の面積は，

$$\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\times2=\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$$

6 (1)　〈証明〉

△AEDと△BFAにおいて，

四角形ABCDは正方形だから，

∠DAE＝∠ABF＝90°　……①

仮定より，

AD＝BA＝6cm　……②

AE＝BF＝x cm　……③

①，②，③より，2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，△AED≡△BFA

対応する角だから，∠AED＝∠BFA

(2)　$\mathrm{AF}^2=x^2+36$

△AEP：△AFB＝x^2：(x^2+36)

(3)①　$\dfrac{9}{2}\mathrm{cm}^2$

②　$x=12-6\sqrt{3}$

⇒(2)　△AEP∽△AFBで，面積の比はAE^2：AF^2

(3)①　△ABQ，△BCR，△CDS，△DAPはすべて合同で面積が等しいから，△ABQの面積の4倍が正方形ABCDの面積の半分と等しくなる。

したがって，

$$\triangle\mathrm{ABQ}\times4=(6\times6)\times\frac{1}{2}$$

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{9}{2}$$

②　△AEP∽△ABQだから，

$$\triangle\mathrm{AEP}:\triangle\mathrm{ABQ}=x^2:6^2$$

$$\triangle\mathrm{AEP}:\frac{9}{2}=x^2:6^2$$

$$\triangle\mathrm{AEP}=\frac{x^2}{8}$$

したがって，△BFQと△AEPは合同で面積が等しいから，

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\triangle\mathrm{AFB}-\triangle\mathrm{BFQ}$$

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\triangle\mathrm{AFB}-\triangle\mathrm{AEP}$$

$$\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\times x\times6-\frac{x^2}{8}$$

これを解くと，$x=12\pm6\sqrt{3}$

$0<x<6$ から，$x=12-6\sqrt{3}$