



コンパス CoMpass

連載「数学的活動へのイノベーション」
コラム集 No.1

CONTENTS

円柱の斜め切りを題材として	…2
円周の等分点を題材として	…4
封筒から作る四面体の考察を通して	…6
反角柱の菓子箱を考察する	…8
ドーナツ形を探究する	…10
「作図の活用」の指導計画	…12
「正五角形の作図」いつやるの？	…15
$PA \times PB$ を探究する	…18
正四面体を見る眼を養う	…21

新連載

数学的活動へのイノベーション

課題学習 円柱の斜め切りを題材として

吉野 茂

〔東京都杉並区立高井戸中学校主幹教諭〕

1. はじめに

楕円は、探してみるといろいろなところで目にする図形の1つである。例えば、テーブルの天板や皿、菓子の缶、表札、さらにスピーカーや切手などのデザインにも使われている例がある。また、経験的には、長ねぎの切り口や門松に使われる竹の切り口の形としても馴染みのある図形であろう。

しかし、残念ながら「楕円」は、中学校までの数学の学習内容として登場する機会がない。高校では、2次曲線の1つとして学習内容に盛り込まれている（現行課程では数学C、新課程では数学Ⅲ）が、はたして、これを履修する高校生は、一体どれだけいるのであろうか。楕円を方程式に表し、その性質を考察する学習は、もちろん高校になってからでよいのだが、中学生なりに、身近な図形としての「楕円」に親しむ学習ができないものかと考え、三平方の定理の単元を終えた後の課題学習として、次のような実践を試みた。その概略を紹介したい。

2. 円柱を平面で切る

1年生の回転体の学習では、その特徴をとらえるために、回転の軸をふくむ平面で切ったり、回転の軸に垂直な平面で切ったときの切り口の図形について学んでいる。

それでは、円柱を斜めに切ったら、切り口はどんな図形になるか？

こんな質問から、授業を始めてみよう。「円がつぶれたような形？」というような反応が多いだろう。「楕円だ」と答えられる生徒がいたら、どんなことまで知っているのか、尋ねてみるとよいだろう。

さて、この学習のために用意したい教具がある。円柱を斜め切りにして作った、図1のような「アクリル製のお会計伝票入れ」または、同形状の「ペン立て」である。前者は、ファミリーレストラン等のテーブルにも置いてあるので、中学生でも何回かは目にしている者もいるのではないだろうか。

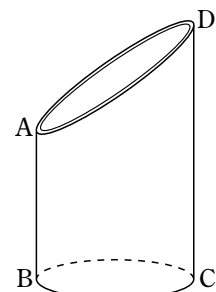


図1

円柱を斜め切りにしたときにできる楕円は、円柱（円筒）形のペットボトルに水を半分くらい入れたものを傾けたときの水面の形で確かめることができるが、固定した切り口を確認しながら考察できる点で、前者の2つのような製品は役に立つ。

さて、この教具を使って、切り口の図形の特徴を調べる活動を取り入れよう。対称性についてはすぐに気がつくであろう。

また、短軸の長さは、元の円柱の直径と一致することを確認したい。さらに、三平方の定理の学習後であれば、長軸の長さを直接測らなくても、例えば、図1において、

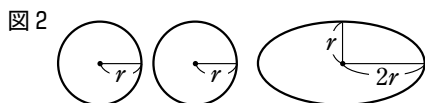
AB=7cm, BC=8cm, CD=13cmといった値から計算によって求めることも可能であろう。さらに、得られた情報をもとに、その概形をノートにかいてみる活動も大切にしたい。

3. 楕円の面積について考えよう

以上のような取り組みの後で、次のような問題を考えさせてみよう。

切り口の面積は求められるだろうか。

勘の鋭い生徒がいれば、 20π という答が返ってくることも予想されるが、多くの場合、このままでは沈黙が続いてしまうであろう。その場合には、次の図2のような円2つ分の面積と楕円の面積の大小について予想させるなど、見通しを持つことのできる場面を設定するとよいであろう。



下の図3～5は、切り口の部分に注目した円柱の体積と、これを2つに切り分けた立体を組みかえてできる「斜柱体」の体積が等しいことをもとにして、楕円の面積を求める方法を示したものである。

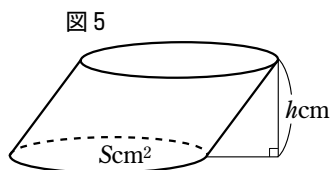
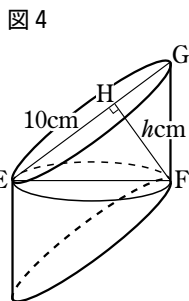
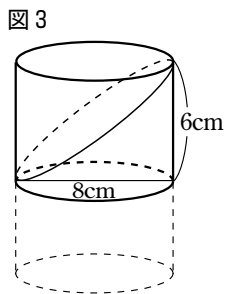


図3～5で示した数値の場合には、 $\frac{1}{2} \times 10 \times h = \frac{1}{2} \times 8 \times 6$, $Sh = \pi \times 4^2 \times 6$ より、 $S = 20\pi$ ということがわかる。

一般に、図4において、 $EF = 2b$, $EG = 2a$, $GF = c$ とおけば、 $\frac{1}{2} \times 2a \times h = \frac{1}{2} \times 2b \times c$, $Sh = \pi b^2 \times c$ より、 $S = \pi ab$ という結果が得られる。

上記の解法では、斜柱体の体積を扱っており、厳密に言えばこれは既習事項とは言えない。しかし、錐体の場合にも、斜錐体をそれとなく扱ってきたことから考えれば、これは許容事項としてよいであろう。

ちなみに、この求め方は、日本数学史上、初めて楕円の面積を求めることに成功したと言われている江戸時代の数学者・関孝和が、その著書『求積』で示したものである。

4. 楕円についてさらに理解を深めよう

紙面の都合で、詳しくは述べられないのが残念だが、「2定点（焦点）からの距離の和が一定である点が動いてできる図形」という定義をもとにした楕円の作図は、生徒たちにとっては興味ある活動となる。

さらに長軸の長さを $2a$ 、短軸の長さを $2b$ とすると、焦点間の距離が $2\sqrt{a^2 - b^2}$ と表せることを理解することもできるはずである。

楕円の面積 πab について、 $a=b$ の場合を考えることにより、円の面積公式との関係に触れることもできる。

与えられた楕円らしき図形が、本当に楕円といえるかどうかを確かめるために、楕円の中心や軸の作図の仕方を考えることも興味ある活動の1つである。

そうやって、「楕円」についての見方を豊かにしていくことにより、色々な場面でこれをデザインとして活用するような創造活動にも貢献していくだろう。こういった取り組みが、数学を学んでいくことの価値の理解にも大いに貢献すると思うのである。

連載

数学的活動へのイノベーション 円周の等分点を題材として

吉野 茂

〔東京都杉並区立高井戸中学校主幹教諭〕

1. はじめに

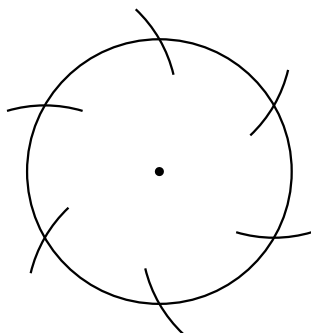
昨年の秋号では、中学生なりに、身近な図形としての「楕円」に親しむ学習ができないかという提案をした。

今回は、「円周の等分点」にスポットを当て、いくつかの視点から、数学的活動への手がかりとなる提案をしたいと思う。

2. コンパス何回で？

第1学年の作図のところでは、正六角形の作図を扱う先生は多いと思う。ふつう扱われるのは、円をかいた後に円周を半径で区切っていく図1のような方法である。

図1



この作図は、コンパスだけで円周の6等分ができるところが売りだし、スタートの点に戻ってくるかどうかで作図力（作図の正確さ）についても確かめることができる。

ところで、この作図はコンパスを何回使っているだろうか。ここでいう「コンパ

スの回数」とは、針をノートの上に置く回数と考えてもらいたい。

図1で示した方法は、円をかいた後、コンパスを6回使用している。ここで提案するのは「この回数を減らすことができないか？」という課題である。ただし、作図で認められている、もう1つの道具である定規の使用回数は制限しないものとする。

「回数を減らせないか？」という問いは、生徒にとって挑戦への意欲を駆り立てられるようだ。直前（来年度からは小6）で学習しているはずの「円の対称性」に注目させたい。それなりの探究の時間を与えれば、少しずつ回数を減らせることに気づいていくだろう。ついには、円をかいた後、たった1回でかけることにたどり着く。

ちなみに、円の12等分はどうだろうか。発展課題として提示するのもよいであろう。実は、こちらも1回で十分なのである。

3. 等分点を3つ選んで

「円周の等分点のうち、3点を結んでできる三角形の種類について考える」という課題はどうだろう。円周の等分点を増やしていくとき、三角形の種類はどのように変化していくだろうか。ただし、合同なものは1種類と考えることにする。

次の表は、4等分から7等分までを調べた結果をまとめたものである。

等分点の数	4	5	6	7	8	...
三角形の種類	1	2	3	4		...

さて、表の空欄およびその先はどのように埋まっていくだろうか？

それまでの学習経験からすれば、 n 等分のときにできる三角形は、 $(n - 3)$ 種類になるのではないかと予想したくなる。しかし、 $n = 3$ および $n \geq 9$ のとき、残念ながらそのようなことはならないことが判明する。帰納的にきまりを見つけることは大切な活動だが、必ずしも真ではないことを、ここでは実感を持って納得させることができる。

また、帰納的に予想した「きまり」が使えないことから、等分点の数を増やしていったときの三角形の種類の数え方については、何か工夫をすることが必要となる。

生徒なりに工夫をさせると、図 2 のような「おきかえ」の考え方が出てくる。

図 2

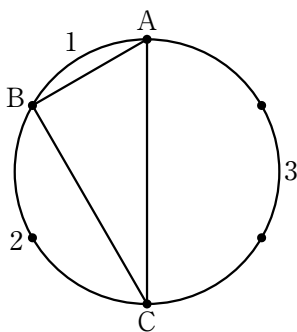


図 2 の $\triangle ABC$ の 3 辺 AB , BC , CA に対する弧の長さはそれぞれ $1 : 2 : 3$ だから、 $\triangle ABC$ を例えば $(1, 2, 3)$ と表すことにしてみよう。

このとき、 $(1, 3, 2)$ や $(2, 3, 1)$ などは、これと合同な三角形になる。そこで、3 辺に対する弧の長さ a, b, c を $a \leq b \leq c$ のように決めておくという工夫をすることにより、重複せずに異なる種類の三角形の総数を調べることができる。

このように、この課題では、三角形を弧の長さの組で表すという「おきかえ」の考えによって、問題解決が容易になることや根拠のある論理的な説明ができることのよさを学ばせることができるであろう。

ところで、円周を x 等分してできる三角形の総数（ただし、合同なものは区別しない）を y とするときの x と y の関係をご存じだろうか。

紙面の都合上、ここでは詳細を紹介できないが、求めたい y の値は、最終的に $\frac{x^2}{12} - \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{x^2}{12} + \frac{1}{4}$ を満たす整数値となることを証明することができる。

もちろん、これを中学生に理解させるのは無理であるが、先生方には興味ある課題となると思う。

4. 12 等分点を制覇しよう

円周の 12 等分は、時計の文字盤に刻まれた図形として身近な題材である。3 で調べたことをもとにすると、12 等分点の場合には 12 種類の三角形ができることになる。

この 12 種類の三角形の面積を求めることを課題としてみよう。取り組む時期は、3 年生の学習をひと通り終えた、ちょうど高校受験直前の仕上げの頃がよいだろうか。

実は、この 12 種類の面積は、既習事項を活用することによって、どれも中学生のレベルで解決することができる。ただし、中には解決への手がかりがつかみにくいものもあるので、生徒の実態に合わせて問題を適宜選択するとよいだろう。

半径は 6cm あたりが適当だろうか。もちろん、数学が得意な生徒には、文字を使って一般的に計算させることも可能である。

連載

数学的活動へのイノベーション 封筒から作る四面体の考察を通して

吉野 茂

〔東京都杉並区高井戸中学校主幹教諭〕

1 はじめに

お菓子やティーバッグなどの包装が、下の写真のような四面体（テトラ型）になっているものを見かけたことはないだろうか。



今回は、これを題材とした、第3学年「B図形」の（3）イにおける数学的活動の例を紹介しよう。各自が四面体を手元に置き、観察や操作をしながら、三平方の定理を活用することにより、空間図形の計量についてさらに深く考察できるようになったことが実感できるような授業展開を期待したい。

2 テトラパックを作ろう

図1

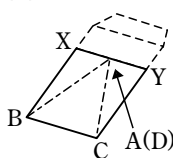


図2

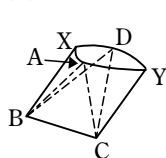
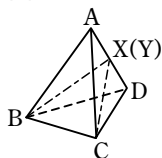


図3



この「テトラパック」と呼ばれる立体は、図1～3のように、封筒（使用済みで十分）を用いて簡単に作ることができる。以下にその手順を簡単に示す。

<手順>

- ① 封筒を底辺 BC と平行な線で切り取り、XY の中点を A (D) とする。(図1)
- ② AB と AC および DB と DC に折り目をつけて、切り口 XY を開く。(図2)
- ③ 点 X と Y が重なるように切り口をテープなどで貼って完成させる。(図3)

参考1

封筒のサイズは、「長3」という規格のものがよい。A4判の書類を定形郵便で送ることのできるごく一般的なものなので、使用済みのものも比較的に見つけやすい。また、封筒の幅（底辺部分）の長さが120mmで、後述の体積問題においても計算しやすい数値である。

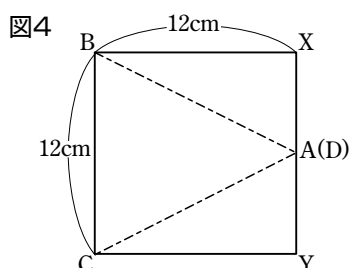
参考2

封筒の「のりしろ」部分の位置によって、センター貼りとサイド貼りの2タイプがあるが、ABなどの折り目を作ったり、立体の側面を切り開いたりする（詳細後述）には、サイド貼りの方が作業しやすい。

3 いろいろなサイズで切ってみよう

この立体は、手順①のXYを切る位置を変えることによって、いろいろな四面体を作ることができる。

図4は、封筒の幅と同じ長さで切り取った場合を示している。折り目にそって組み立てさせた後、この立体の高さや体積を求めることができるかどうかを考察させよう。



この立体の内部の様子を調べるためには、図5のように上面のAHに切り込みを入れて、手前の半分を折りたたむとよい。(図6)このときの、 $\triangle AHD$ がどんな三角形になるかを確かめれば、上記の課題は容易に解決される。

図5

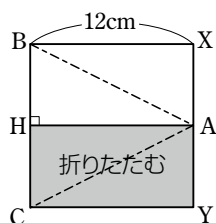
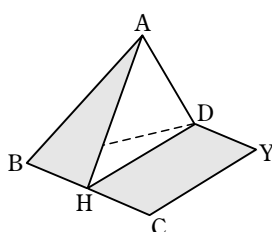


図6



次に、違うサイズで切ることを考えよう。

図7

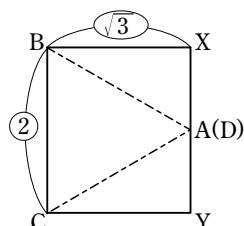


図8

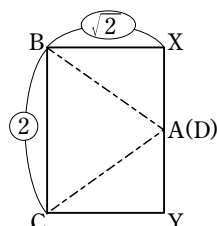


図7は、 $BC:BX = 2:\sqrt{3}$ の場合、図8は、 $BC:BX = 2:\sqrt{2}$ の場合である。このような比率で切るための作図方法についても確認しておきたい。

図9

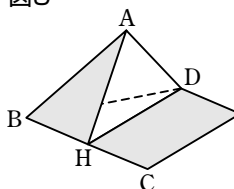


図10

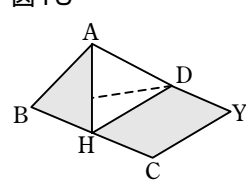


図9、図10は、それぞれ図7、図8を組み立て、内部が見えるように切り開いた場合を示している。

図9により、正四面体の内部を覗くことができる。正四面体の平面図と組み合わせながら、高さがどのような位置に現れるかを考察させたい。特に、未習の重心の話を持ち出さなくても、生徒は自ら手がかりを発見するはずである。

図10の $\triangle AHD$ は直角三角形といえるのだろうか。ここでは、三平方の定理の逆についても振り返ることができる。

この課題に興味・関心をもった生徒たちは、さらに違う切り方によって様々な発見を楽しんでいくことだろう。

4 おわりに

実際に目の前に立体を置いた考察は、見取図だけでは味わえない貴重な体験となる。「3次元の中の直角三角形を見抜く眼」をじっくり養うことにも大いに貢献するはずである。「空間」を数学的に分析するための礎として大切なこの定理を、このような課題を通して実感をともなった理解につなげていきたいものである。

連載

数学的活動へのイノベーション 反角柱の菓子箱を考察する

吉野 茂

【東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭】

1 はじめに

夏休みを利用した旅行先で、下の写真に示したような土産用の菓子箱を見つけた。写真では細部がわかりにくいですが、構造的には、どちらも同じで、上底面と下底面が平行で合同な正方形、側面が合同な二等辺三角形で囲まれた多面体である。

このような立体の体積を、中学校レベルの数学で求めることができるだろうか。

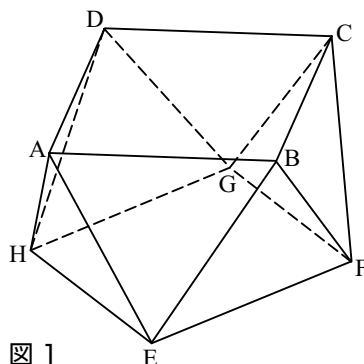


図 1

この立体は、四角柱をねじって側面の長方形を二等辺三角形にした多面体で、このような立体を「反角柱 (antiprism)」または「ねじれ角柱」という。なお、反角柱の中で、底面が正多角形のものを「正反角柱」という。図 1 の立体では、底面が正方形なので、「正反四角柱」というのだろう。

ネーミングはともかく、次に、この立体を真上から観察してみよう。どんなことに気づくだろうか。(図 2)

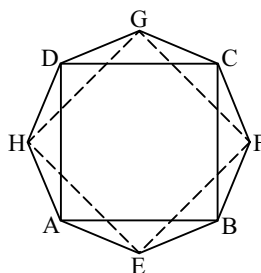


図 2

まず、下底面 EFGH は上底面 ABCD を対角線の交点を中心として 45° 回転移動させた位置にあるから、平面図は正八角形になる。

2 立体を観察してみよう

中学校の数学で、体積について公式化されている多面体は「角柱」と「角錐」であるから、その他の多面体の体積については、もし求めることができるのなら、これらの公式が使えるように、「対象図形を分解する」、「対象図形を囲んで不要部分を切り取る」、「対象図形を等積変形する」などの工夫が必要である。今回の立体については、どのような工夫をすればよいだろうか。

まず、図 1 を見てみよう。これは、上の写真の左側の立体の見取図である。

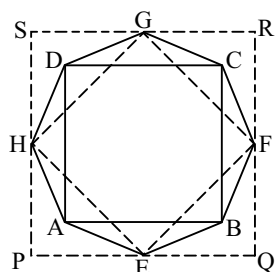


図 3

また、E, F, G, Hは、下底面の対角線を1辺とする正方形 PQRS 上にあることがわかる。

(図 3)

今回新しく学ぶことになった「投影図」は、このように空間図形を分析的に考察するツールの1つとして役立てるとよい。

以上のことから、四隅に三角錐部分を補えば、立体 ABCD-PQRS は正四角錐台となることがわかる。(図 4)

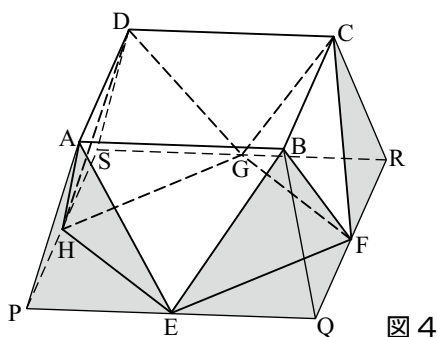


図 4

3 角錐台の体積を求めよう

図 5 のような角錐台の体積は、どのようにして求めればよいだろうか。

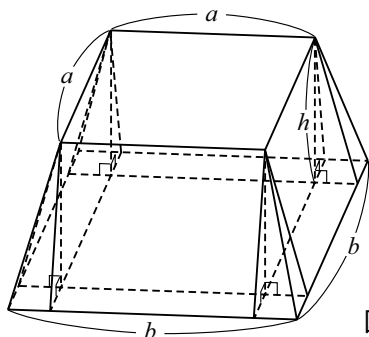


図 5

いくつかの方法が考えられるが、ここでは、公式が使える立体に分割することを考

えてみる。図 5 のように、中心の正四角柱のまわりに、4つの三角錐と4つの三角柱ができることを確認しよう。これらをもとにして、この正四角錐台の体積 V を計算すると、 $V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$ となる。

この式を図 4 に適用して、図 1 の立体の体積を計算すると、 $b = \sqrt{2} a$ より、

$$\frac{2+\sqrt{2}}{3} a^2 h \text{ という式が導かれる。}$$

この式を「よむ」と、係数の関係から、同じ高さの正四角柱の体積より若干大きくなっていることもわかる。

ちなみに、角錐台の体積 V は図 6 のように相似の考えを利用して一般化すれば、

$$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$$

より、

$$V = \frac{1}{3} S_2 (x+h) - \frac{1}{3} S_1 x$$

を計算して

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

となることが導かれる。

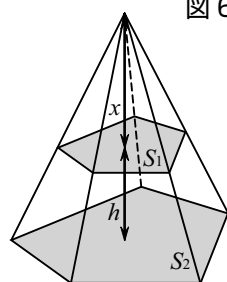


図 6

4 おわりに

「数学的活動を通して…」で始まる数学科の目標は、毎時間の授業において、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む活動となることを要請している。そのような授業の実現のためには、生徒が考えたくなる、また、考えるに値するよく吟味された教材を提示することを心がける必要がある。

指導する側も、日頃から「数学的な活動」を楽しむ機会を充実させながら、よりよい教材の開発を行うとともに、それを共有化する取り組みを推進したいものである。

連載

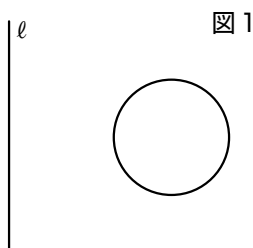
数学的活動へのイノベーション ドーナツ形を探究する

吉野 茂

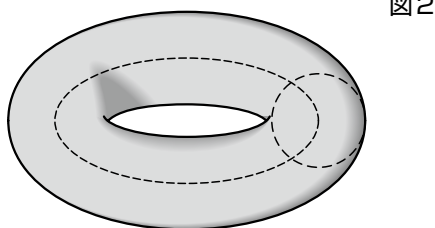
【東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭】

1 はじめに

この春から使用されているいくつかの検定教科書の中で、下の図1に示すように、円を直線 ℓ のまわりに1回転させてできる立体について考えさせる場面を設定しているものがある。



この回転体は、ご存じのとおり、図2に示すような円環体と呼ばれる立体である。身近な立体としては、環形蛍光灯やドーナツ、あるいは浮き輪などがあげられるであろう。



本稿では、この回転体について、計量の面にも注目しながら、中学生なりに納得できる活動にするための方策について考えてみたい。

2 既知の考えをもとにして

この立体の体積を求めることは、積分の応用として、高校の教科書の例題でとりあげられているが、これを中学生にも取り組めるように、求め方を工夫してみよう。

まず、回転させる面を正方形に変えた場合と比較しながら考えてみる。(図3)

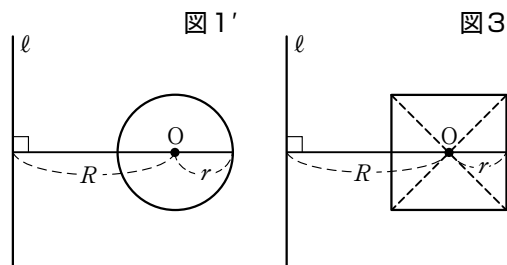


図3のような問題は、中学校のどの教科書でも扱われる定番メニューの1つである。ここでは、図1'との比較のために、正方形としたが、一般的には長方形でよい。身近な立体としては、トイレトーパーやバウムクーヘンなどがあげられるであろう。

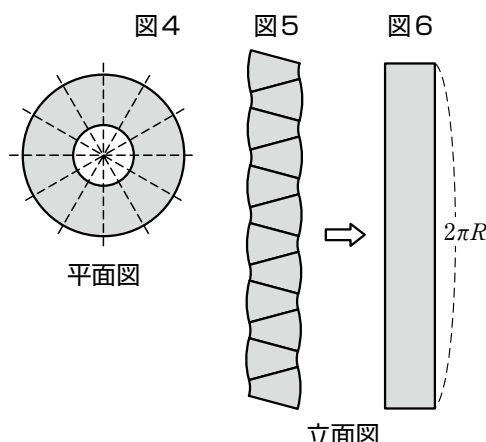
図3の回転体の体積は、ふつう次のように円柱の体積の差を計算して求める。

$$\begin{aligned} & \pi(R+r)^2 \times 2r - \pi(R-r)^2 \times 2r \\ &= 8\pi Rr^2 \end{aligned}$$

しかし、図1'の場合は、このような考え方が使えないから、何かの別の方法を検討する必要がある。

そこで、「円の面積公式」や「中心角を使わないおうぎ形の面積の求め方」(教科書

1年 p.190 参照) を考えたときのように、同心円部分を図4のように等分し、図5のように、回転する面を交互にあわせて積み重ねた立体を考えてみる。



等分する数を増やしていけば図6のような柱体とみなせるという説明は、小学校で円の面積を長方形に帰着させた考え方と同じである。曖昧さは残るものの、中学校の数学としては許容してよいであろう。高さの $2\pi R$ については、次のようにして求めればよいことを確認しておきたい。

$$\frac{2\pi(R+r)}{2} + \frac{2\pi(R-r)}{2} = 2\pi R$$

さて、柱体とみた図6の体積を実際に計算してみると、図3の場合には、回転する面(正方形)の面積が $4r^2$ であるから、

$$4r^2 \times 2\pi R = 8\pi Rr^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるが、これは前述の円柱の体積の差をもとにした結果と一致する。

この方法を認めることにすれば、図1'の場合には、

$$\pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

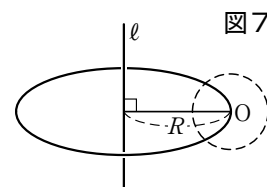
ということになる。 π が2乗になるところが新鮮だが、この結果は積分を使って求めた結果と一致して正しいものである。

3 文字式をよむこと

前述の式①と②の左辺に注目してみよう。この中で、 $2\pi R$ は柱体の高さとして扱ったが、これは回転させた面の中心(重心)がえがく曲線(円周)の長さに等しいと考えることができる。(図7)

したがって、①と②の左辺の求め方は、
(回転する面Fの面積) $\times$ (Fの重心の移動距離)
とまとめることもできる。

実は、これは、
パップス・ギュ
ルダンの定理と
よばれているも
ので、これを使



うと、回転体の体積を考えるときには便利なこともある。上記の課題のように、回転する面が点対称な図形のときには、対称の中心が重心となるので扱いやすいが、一般的には、回転する面の重心が簡単には求められないことに留意する必要がある。

さて、体積についての探究が終わったら、今度はこの回転体の表面積についても考えさせてみたい。これについては、再び図6に注目することにより、柱体の側面積と等しくなることが容易にわかるであろう。

さらに、この回転体の表面積を、「パップス・ギュルダンの定理仕立てにすることができないか」と考えることは興味ある話題となる。

4 終わりに

今回の題材は、高校で学習するとはいっても、これは数Ⅲの内容であるから、履修するのは理系を中心とした一部の生徒だけである。したがって、多少の曖昧さはあるものの、今回のような扱いで中学生に体感させておくことは、それなりに意味のあることではないかと考えているのであるが、いかがであろうか。

連載

数学的活動へのイノベーション 「作図の活用」の指導計画

吉野 茂

〔東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭〕

1 はじめに

今回は、第1学年のB図形領域の「作図」について考えてみよう。

中学校学習指導要領（文部科学省，2008）の第1学年の図形領域の目標には，「見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を培う」とある。今回，特に，「論理的に…培う」の部分が加わったことを受けて，今まで以上に，数学的活動を通して目標に迫る指導を進められていることと思うが，くれぐれも，「かき方指導」だけに終始してしまうことのないように留意したい。

「基本の作図」の学習展開については各指導者の工夫に委ねるとして，本稿では，その後の「作図の活用」について考えてみたい。

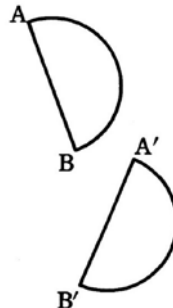
2 新課程と「作図」（その1）

新課程においても，「基本的な作図」の学習内容には変化はないが，今回の改訂による他の指導内容の変更（復活）に伴って，「作図」の問題にもいくつかの復活があることに留意したい。本稿を執筆している段階で，今年度の高校入試の情報をまだ十分得ていないので，昨年の春実施（移行措置の内容を1年から学んだ生徒が受験した初年度）の問題の中から，まず，「移動」に

関するものを考察してみよう。

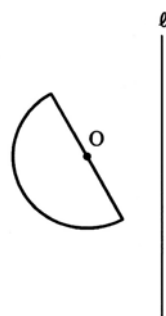
右の図において，
線分 $A'B'$ を直径とする
半円は，線分 AB を
直径とする半円を
回転移動したもの
である。このとき，
回転の中心 O を，
コンパスと定規を
用いて作図しなさい。

（2012 群馬県）



下の図のような，半円 O と直線 l がある。この半円を，
直線 l を対称の軸
として対称移動
した図を作図せよ。

（2012 愛媛県）



学習指導要領解説書（文部科学省 2008）には，「移動に関する内容を，作図に関する内容と密接に関連させながら取り扱うことで，平面図形についての理解を一層深め

るとともに…」とある。したがって、「移動」を題材としたこのような作図は、今後も出題が予想されると思うし、学習のねらいからも指導計画の中に位置づけておきたい。

前者の作図は、基本の作図の垂直二等分線を活用するものであり、また、回転移動の性質を確認するものとしても大切な課題だと思うが、昨年春から使用している検定教科書において、残念ながらこのような課題はまだ多くはみられない。

一方、後者の作図については、いろいろな解答類型が考えられるので、授業の中で取り上げ、数学的活動に生かすとういと思う。

この問題について

発表されている

解答例は、右の図1の通り

であるが、

教科書に記述

してある対称

移動の性質から

考えると、図1の

ような発想よりも

図2のような

考え方をする

生徒の方が

多いのでは

ないと思われる。

しかし、授業の中では、

図1のような発想にも至る展開を期待したいところである。各学校の生徒の実態はどうであろうか。(註：図1の作図について、延長線のアイデアはよいのだが、半径の確定が不明確なのがちょっと気になる。)

3 新課程と「作図」(その2)

次に示したのは、復活した学習内容の1

つである「相似と面積比」に関するもので、中学3年生対象の作図である。

右の図の△ABC

に対して、次の

ものを定規と

コンパスを

用いて作図

しなさい。

(1) ABを対角線とする正方形

(2) 点B'は辺AB上、点C'は辺AC

上の点であり、 $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$

であって、 $\triangle AB'C' = \frac{1}{2} \triangle ABC$

となる点B'と点C'

(2012 慶応義塾女子)

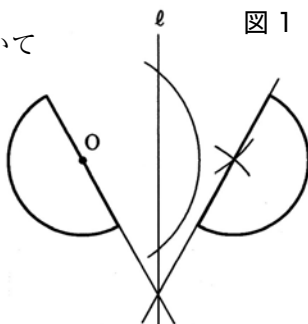
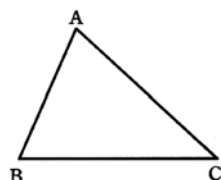


図1

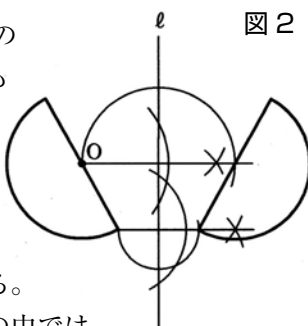


図2

(1)は、図3のように垂直二等分線を活用する標準的な

作図の問題で

ある。

一方、(2)は、

「平方根」の知識や

「特別な直角三角形

の比」および今回の改訂で復活した「相似な図形の面積比」の知識が必要である。

「面積を半分にするには、対応する辺を $\sqrt{2}$ 分の1にすればよい」ということと、(1)

の作図に潜む

$1:\sqrt{2}$ の関係を

ヒントに、図4の

ような作図をする

ことになる。(註：

①は、辺AB上に

$AD=AB'$ となる点

B'をとっている。)

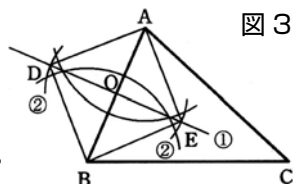


図3

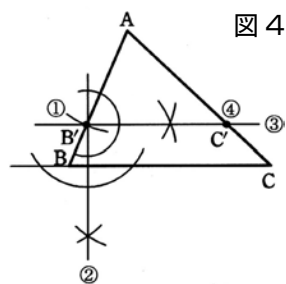


図4

この問題は難度がやや高いが、学習の進行にあわせて図形の性質などを作図に活用していく例として紹介しておく。

ちなみに、この作図の後半部分（②～③）では、基本の作図である2種類の「垂線」を活用しているが、これは結局、「平行線」の作図になっている。中学校では、「平行線」を基本の作図に入れていないため、これが一般的な作図となるが、図5のように、

「角の二等分線」

の作図において

円の半径を等しくとれば

「平行線」は

現れている。

上記のような課題を扱うときに、こういった見方を発展的に学び直すこともできる。

4 学習の深化と「作図」

最後に次の問題を考えてみよう。

図のように、線分 OA, OB がある。

下の【条件】の

[1][2] をとも

にみたす点 P を、

定規とコンパス

を使って作図し

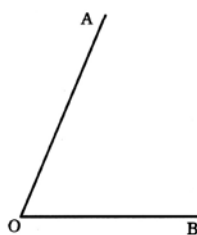
なさい。

【条件】

[1] 点 P は、 $\angle AOB$ を 2 等分する直線上にある。

[2] 点 P は、線分 OA を斜辺とする直角三角形の頂点である。

(2012 山形県)



これは、中学1年生が取り組むことのできる標準的な作図問題である。図6に示すように、基本の作図である「角の二等分線」と「垂線」を連動せればよい。多くの生徒が、このように作図するであろう。

しかし、中学校2年で二等辺三角形の性

質を学習した後ならば、図7のような方法で作図することも可能である。さらに、中学3年で円の学習をしているときならば、図8のような工夫があってもよいであろう。

このように、一度扱った問題であっても、学年進行によるツールの増加とともに、作図力が深化・発展していくことを味わわせていくことも大切である。

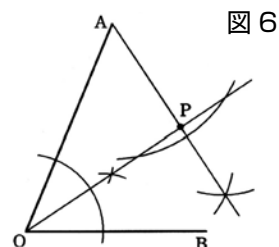


図6

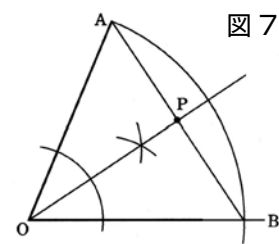


図7

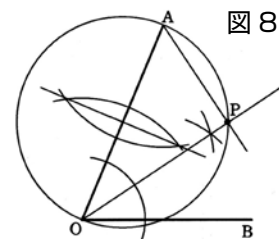


図8

5 おわりに

新課程で復活した作図の研究、および学年の進行にあわせた継続的な作図指導の大切さを述べてきたが、最後に中高の接続について一言ふれておきたい。

平成12年度からの新課程において、高校数学にも「作図」が新設されているのをご存じだろうか。高等学校学習指導要領(文部科学省, 2009)の「数学A」の内容(3)図形の性質の「ア平面図形の(ウ)作図」では、「基本的な図形の性質などをいろいろな図形の作図に活用すること」とある。新しい検定教科書を見ても扱い方は様々であり、内容面は今後ももう少し整理されていくであろうが、どんな内容を扱うことになっているのかを確認すると、中学数学の指導者にとっても、よい教材研究になると思う。

連載

数学的活動へのイノベーション 「正五角形の作図」いつやるの？

吉野 茂

〔東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭〕

1 はじめに

前回は、学年の進行にあわせた継続的な作図指導の大切さを述べたが、今回も引き続き作図に関する課題について考えていこうと思う。

高校においても、数学 A という科目の中で「作図」を扱うようになり、中学校での学習内容を基にして、「基本的な図形の性質などをいろいろな図形の作図に活用すること」を学習することになっている。

例えば、高校の学習指導要領解説書（数学編）の中で、「正五角形などの作図を扱うことが考えられる」ことが示されているが、この作図はどの教科書でも扱われているわけではないので、すべての高校生が学ぶとは限らない。

そこで、今回は、義務教育における学びの総仕上げとして、中学生にも「正五角形の作図」を課題とすることができないか？ということについて考えてみたいと思う。

2 何がわかれば作図できるのか？

まず、1 辺の長さがわかっている場合の正五角形について考えてみよう。

図 1 のように、作図したい正五角形の頂点を A, B, C, D, E とし、そのうちの 1 辺 CD からスタートするとして、次にどの点を作図すればよいかを考える。

結論としては、

残りの 3 点のどれであっても、正五角形を作図することはできる。また、どの点を選んだとしても、それは正五角形の対角線の長さを決定することに帰着する。作図するにあたって、このことを理解しておくことは、大切な活動であるといえよう。

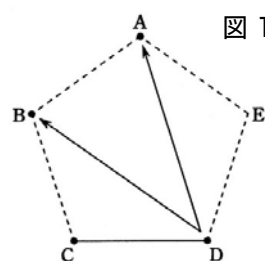


図 1

3 対角線の長さを求めるには？

次に、対角線の長さはどのようにすれば求められるのかを考えることになるが、これについては、ほとんどの検定教科書において、「自由研究」や「課題学習」の頁で「黄金比」の紹介とともに取り上げられているので、それらを参考にするとよいと思う。

ただし、多くの教科書で、対角線を求めるために必要な

2つの三角形が予め指定されてしまっているのは残念なことである。図 2 のように、5 本の対角線が引かれた

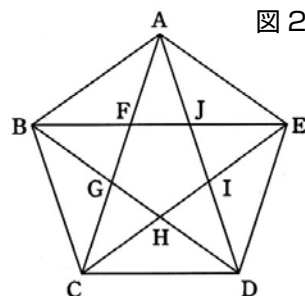


図 2

図の中には、いろいろな相似な図形を見つけることができるので、それらのうちどれを用いて対角線の長さを求めればよいかを考えることも、大切な活動だと思うからだ。

また、この課題解決を通して、思わぬ副産物に出会うこともある。それまでの学習経験がどうなっ

ているのかにもよるが、図3において、2本の対角線によって1つの内角が等分されることを、生徒によっては

とても新鮮な事実として受け止める場合がある。

これは、正五角形に限らず、すべての正多角形についていえることであり、円周角の定理の学習後であれば簡単に確認することができる事項であるが、それまでの間には不思議な性質の1つであるので、必要に応じて丁寧に指導することも大切である。

さて、本論に戻って対角線の長さについて確認しよう。例えば、図4で、△ACIと△DEIが相似であることに注目し、

1辺の長さを1とした場合について考えると、

$$x:1 = 1:(x-1)$$

$$\text{より } x^2 - x - 1 = 0$$

これを解いて

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ となる。}$$

中学校3年の検定教科書では、正五角形を黄金比の紹介の題材として扱っているだけなので、ここで話が終わっているが、本

稿では、正五角形の作図を目標として対角線の長さを求めようとしたわけであるから、ここからがいよいよ本題となる。

4 作図をしてみよう(その1)

長さ1に対して $\frac{1}{2}$ を作図することは、中学校1年の基本の作図で学習済みである。問題は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ であるが、基本は $\sqrt{5}$ の作図である。正式には、三平方の定理の学習を待たなければならない内容であるが、「平方根」の学習で何度か登場している経験をうまく生かせば、それを待たずに、作図する方法も理解できるはずである。

一般には、1辺の長さがわかっている場合の作図は、次の図5と図6がもとなる。

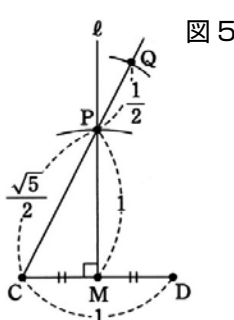


図5

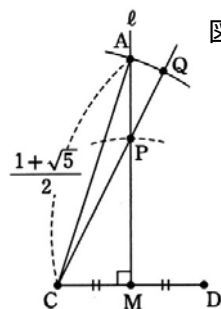


図6

5 作図をしてみよう(その2)

次に、正五角形の外接円の半径がわかっている場合の作図について考えてみよう。この場合の作図も、その方法自体はそれほど難しいものではないが、その証明まで考えると、中学生には難しいものとなる。

その理由は、作図に必要な長さの関係が、次の表に示したようになるからである。

1辺の長さ	1	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$
対角線の長さ	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$
外接円の半径	$\frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$	1

外接円の半径から作図する方法は、一般に図7のように行われる。

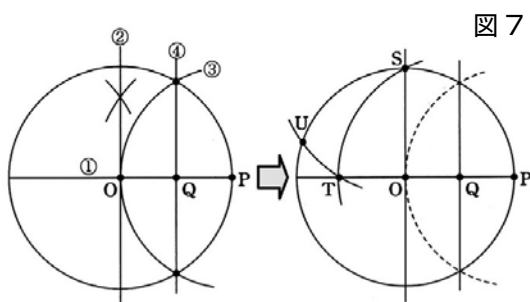


図7

上の図で、弧STは、中心をQ、半径をQSとしたものである。また、弧TUは、中心をS、半径をSTとしたものである。

このとき、線分SU (= ST)の長さが、求めたい正五角形の1辺の長さになるのだが、その値は、円Oの半径を1にとったときに、前頁の表のようになるので、これを追究するのは、中学生にとっては、ちょっとハードルが高すぎるであろう。

そこで、ひと工夫し、1辺の長さを決定するのに、直接、数値を使って求めなくてもよい作図の方法を考えてみることにする。

まず、1辺の長さを決定するまでの作図は、図7の左の図の後、次の図8、図9のように作図を進める。

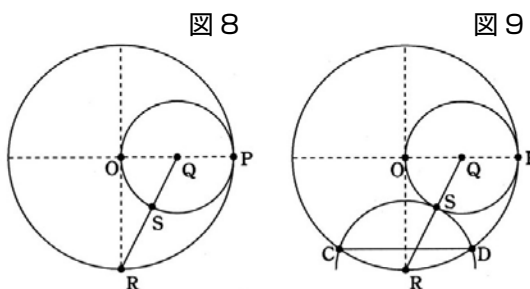


図8

図9

このとき、線分CDが正五角形の1辺になるのだが、それはなぜだろうか？

まず、図10で、 $\triangle ACD \sim \triangle OCR$ であることを確認しよう。正五角形を作図する

には、 $\triangle ACD$ を底辺：等辺 = $1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ という比をもつ二等辺三角形とすればよいわけだから、

$\triangle OCR$ もそのような比の二等辺三角形になるように作図すればよい。

図9において、 $OQ = 1$ とすると、 $QR = \sqrt{5}$ となり、 $SR = \sqrt{5} - 1$ を得る。

よって、図10の $\triangle OCR$ において、 $CR : OC = (\sqrt{5} - 1) : 2$ となるが、この比は変形すると、 $1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ と一致する。

この比の変形は、うまく誘導する必要があるが、これならば何とか中学生なりに、根拠をもって作図することに対して貢献できるのではないだろうか。

さらに、この作図は円周を五等分する方法を与えていることにも注目したい。

6 おわりに

現行課程になって、二次方程式の解の公式が扱えるようになったため、正五角形の対角線の長さを求める問題が、公立高校の入試問題にも登場してきている。また、相似な図形の面積比も扱えるようになったため、例えば図2の五角形FGHIJの面積などについても考察することができるようになった。

正五角形を舞台とした課題解決は、まだまだいろいろ考えられるであろう。それらを、いつやるのか？どこまでやるのか？それはすべて、授業者の工夫次第である。

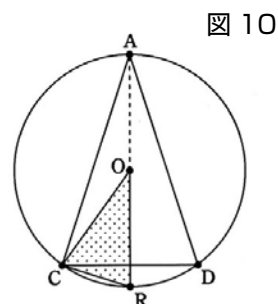


図10

連載

数学的活動へのイノベーション PA×PB を探究する

吉野 茂

〔東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭〕

1 はじめに

学習指導における問題解決において、生徒にとっては不思議な結果に到達することがある。そして、その意味を探っていくことで、また新たな発見に出会うことも多い。「なるほど！すっきりした。」という体験は、さらなる学習への原動力にも繋がり、大切にしたいものである。

今回は、第3学年6章「円」の〔ジャンプ〕の頁（教 p.182）にある「弦の長さ」を題材として話を進めようと思う。

2 相似な三角形を見つける活動

教科書では、まず、本文の p.174 で、円周角の定理を活用する証明の例題として、図1や図2の中に潜む相似について考察する活動が取り上げられている。この問題では、補助線をひいて「相似な三角形を見つける活動」を大切にしたいところではあるが、教科書ではその性質上、証明すべきことが示されている。

図1

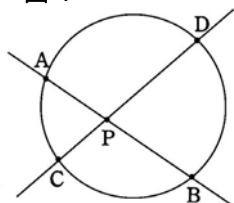


図2

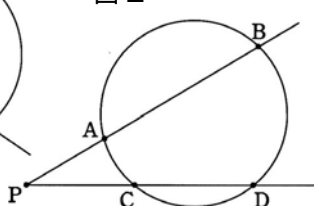


図1からは、図3のア、イのような相似な三角形が見つかる。

図3-ア

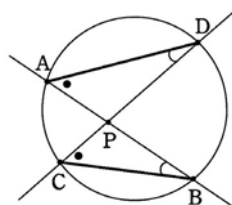
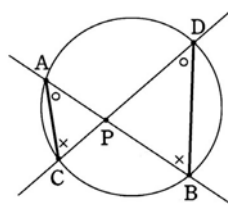


図3-イ



また、図2からは、図4のア、イのような相似な三角形が見つかる。

ただし、図4のイは、「円に内接する四角形の性質」を本文では扱えないため、教 p.181 の〔ジャンプ〕での扱いとなっている。

図4-ア

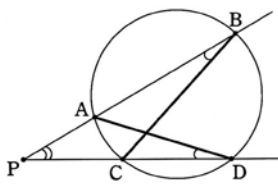
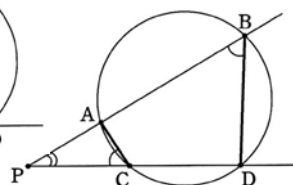


図4-イ



教 p.182 の〔ジャンプ〕では、上記のいずれの場合においても、 $PA \times PB = PC \times PD$ が成り立つことを数学的な活動を通して確認することになっている。

3 PA×PBは何を表すのか？

教師用指導書でもふれているように、こ

の性質は「方べきの定理」と呼ばれ、高等学校の数学 A で学習する内容である。

したがって、中学生への指導において、この性質を活用するような課題まで深入りする必要はないが、ここで気になるのは、 $PA \times PB$ の意味である。これは図形的にはどのような意味をもつのだろうか？

$PA \times PB$ は 2 つの線分の長さの積であるから、それらを各辺とする長方形の面積を表していると考えることができるであろう。

そのように解釈をすれば、 $PA \times PB = PC \times PD$ は、2 つの長方形の面積が等しいことを表していると考えることができる。

図 5 および図 6 は、それぞれ図 1 および図 2 の場合について、上記のことを示したものである。

図 5

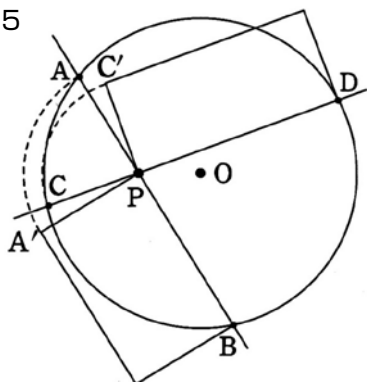
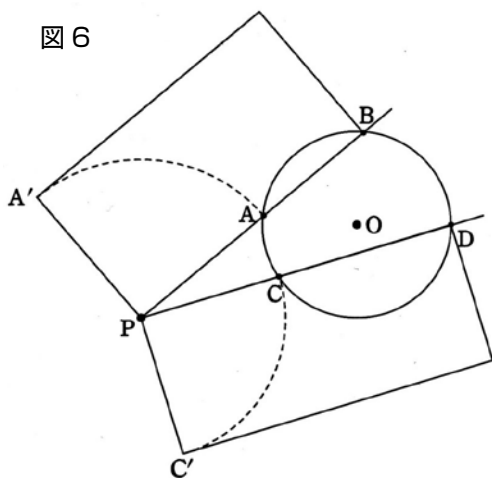


図 6



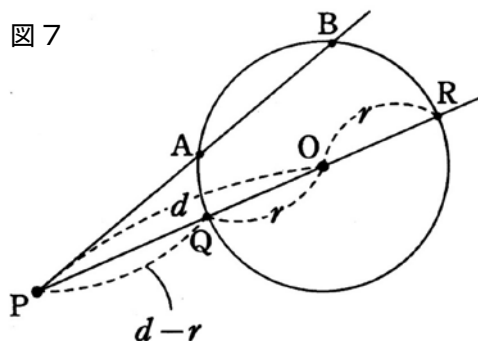
4 $PA \times PB$ が一定の意味は？

$PA \times PB = PC \times PD$ が成り立つということは、点 P を通り円 O と 2 点で交わる 2 直線をどのようにひいても、円によって分割される 2 つの線分の積が一定になることを意味している。その値はどのようなになるのだろうか？

まず、図 2 のように点 P が円 O の外にある場合について考察してみよう。

「点 P を通り円 O と 2 点で交わる 2 直線をどのようにひいてもよい」のであるから、円外の点 P と円 O との位置関係を語ることにできるように、点 P を通る直線が円 O の中心 O を通る場合を考えてみる。(図 7)

図 7



円 O の半径を r 、点 P と円の中心 O の距離を d とすると、図 7 より次のことがいえる。

$$\begin{aligned} PA \times PB &= PQ \times PR \\ &= (d-r)(d+r) \\ &= d^2 - r^2 \end{aligned}$$

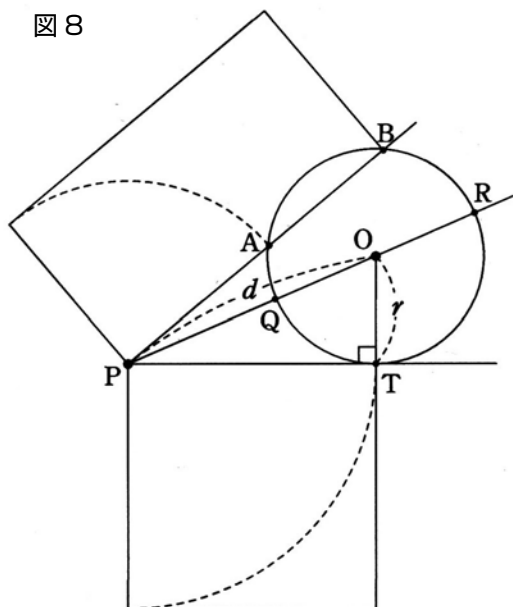
つまり、 $PA \times PB$ は、 r と d によって決定する値となる。

この結果の図形的な解釈を理解するには、次章の「三平方の定理」の学習を待たなければならないが、図 8 に示すように、 $PA \times PB$ の値は、円外の点 P から円 O にひいた接線の長さを 1 辺とする正方形の面積と一致するのである。

この一定の値のことを「点 P の円 O に関

する方べき」というのだが、上記のように考えると「方べき」というネーミングのよさが理解できるであろう。

図 8



次に、図 9 のように点 P が円 O の中にある場合について考えてみよう。

図 9

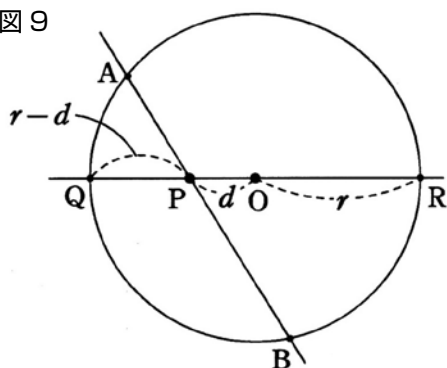


図 9 より次のことがいえる。

$$\begin{aligned} PA \times PB &= PQ \times PR \\ &= (r-d)(r+d) \\ &= r^2 - d^2 \end{aligned}$$

この場合もやはり、 $PA \times PB$ は、 r と d によって決定する値となり、図形的な意味は図 10 によって示される。

図 10

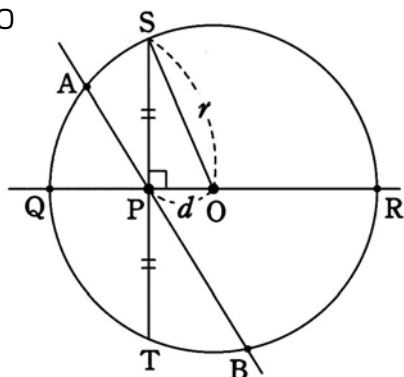


図 10 において、 $r^2 - d^2$ が何を表しているのかについては、もうおわかりであろう。

5 おわりに

今回取り上げた「方べきの定理」について、これを中学生にそのまま指導することを期待しているわけではない。相似を学んだことによって見えてくる、円と弦（割線）の不思議な性質について、中学生なりに探究する場面を設定できるのではないかという提案である。適切な数値や適切な場面設定によって、「相似」と「三平方の定理」をコラボするよい教材に仕立て上げることができるのではないだろうか。設計の詳細については指導者のアイデアと数学的な活動に委ねることにしたい。

なお、図 10 において、 $PQ=a$ 、 $PR=b$ とすると、 $PS=\sqrt{ab}$ となる。この関係は、根号のついた数の作図にも生かすことができるであろう。

さらに（これは中学生には余計なことではあるが）、 $OS=\frac{a+b}{2}$ であることに注目すると、図 10 は相加平均と相乗平均の関係を図形的に説明しているという見方もできるであろう。

指導者の数学的活動を通して、生徒にとって意味のある教材のストックを増やし、これを共有化していくことを期待したい。

連載：数学的活動へのイノベーション

正四面体を見る眼を養う

吉野 茂

〔東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭〕



1. はじめに

以前に、「封筒から作る四面体」の考察を取り上げたことがある。(2011 年春号)

正四面体については、中学校 1 年生の教科書に登場するものの、それ以降、その計量について教科書では扱われていない状況にある。しかし、空間図形について、自分で視点を決めて観察し、分析的に考察するという見方や考え方を身に付けたり、実感を伴って理解を深めることの学習を進めるという点で、正四面体は、もっと積極的に扱ってよい立体ではないかと考える。

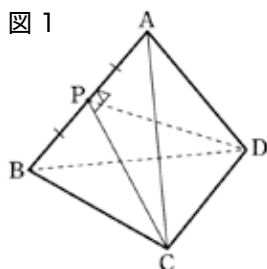
ここでは、以前の拙稿の続編として正四面体の体積のいろいろな求め方や正四面体の接球について考えてみようと思う。今回もやはり立体を手元において考察しよう。

2. 正四面体の体積の求め方は？

3 年生の図形の指導を一通り終えた段階を想定し、正四面体の体積について、どのようなアプローチができるかを検討しよう。

1 年生で直線と平面の垂直関係を学習しているので、図 1 のように、面 PCD と辺 AB と位置関係を確認することにより、正

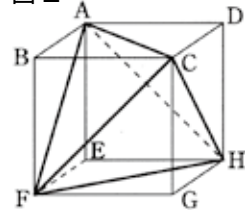
図 1



四面体 ABCD の体積を求めることができる。このような見方は、例えば今春の富山県の入試などにその出題例がある。

2 年生では、立方体の切断についての考察(p.173 ジャンプ)を行っているので、図 2 のような立体 ACFH が正四面体になることを理解することもできるであろう。このような立体の見方は、例えば 2014 年の京都府の入試などにその出題例がある。

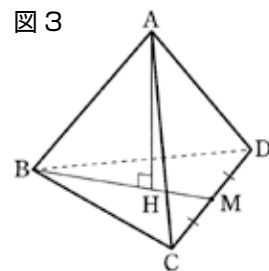
図 2



さらに、三角錐 BACF の体積がもとの立方体の $\frac{1}{6}$ になることや、 $\triangle ABC$ などが直角二等辺三角形であることをもとにすれば 1 辺を a とする正四面体の体積が $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ と一般化されることも容易に理解できる。

一方、図 3 のように頂点 A から底面 BCD にひいた垂線の足を H とし、AH をこの立体の高さとして体積を求める方法も考えることができる。

図 3



H の位置を把握するには、A から見たときの底面 BCD をかいてみればよい。(図4) 現行課程では「重心」が中学校の学習メニューにはないが、「重心」に触れなくても、この図の中に 30° 、 60° 、 90° の三角定規形を見出すことにより、

$BH : HM = 2 : 1$ と

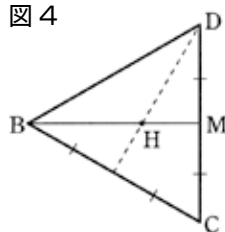
なることは理解できるはずである。このことをもとにして、

$AH \times \frac{\sqrt{6}}{3} a$ となる

ことがわかる。

なお、3 年の教科書では重心も話題にしているの、これを活用することも可能である。(p.161 ジャンプ)

図 4



3. 4 つの頂点を通る球についての探究

次に、正四面体の 4 つの頂点を通る球（外接球）とその半径について考えてみよう。

図5はそのイメージを見取図に表したものである。

図 5

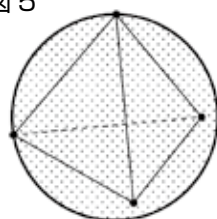
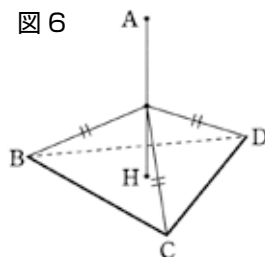


図6に示すように、図3のAH上の点は、3点B、C、Dから等距離にあることを確認しよう。したがって、球の中心Oは、AH上のどこにあるはずである。

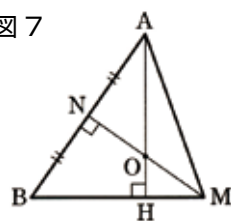
図 6



また、中心Oは2点A、Bからの距離が等しい点とも考えられるので、点OはABの垂直二等分線上にもある。したがって、

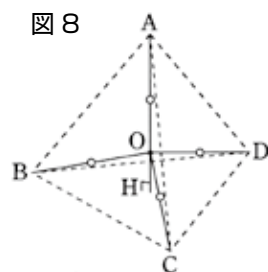
面ABMにおいて、ABの中点をNとすると、点OはABとNMの交点となることがわかる。(図7)

図 7



以上のことを考慮して正四面体ABCDの見取図に表すと、図8のようになる。

図 8



ここで、点OはAHをどのように分ける点なのかを考えてみよう。

図8において、

$OA = OB = OC = OD$ となっていることがわかるが、このことは正四面体ABCDが、点OによってOHの長さを高さとする4つの合同な正三角錐に分割されることを意味する。このことから、 $OH = \frac{1}{4} AH$ となり、点OはAHを3:1に分ける（内分する）点であることがわかる。

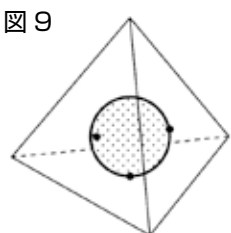
また、この結果は、図7の面ABMにおいて、 $\triangle AON$ と $\triangle ABH$ が相似であることに着目することによっても確かめることができるので、計算させておきたい。

以上のことから、1辺を a とする正四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{4} a$ となる。

4. 4 つの面で接する球についての探究

正四面体の4つの面に接する球とその半径についても考えてみよう。図9はそのイメージを見取図に表したものであるが、この内接球の中心はどこにあるのだろうか。

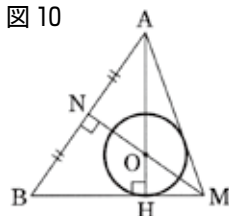
図 9



先ほどの外接球の考察の中で、正四面体 ABCD が、点 O によって 4 つの合同な正三角錐に分割されることを確認したが、実は点 O から各面にひいた垂線の長さが、正四面体の内接球の半径となるのである。

図 10 に示したように、面 ABM で考えれば、OH を半径とする円が内接球の大円を表していることになる。つまり、正四面体の内接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ となる。

図 10

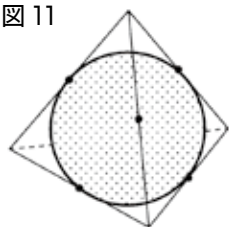


5. 6 つの辺で接する球の探究

最後に、正四面体の 6 つの辺に接する球とその半径についても考えてみよう。

図 11 はそのイメージを見取図に表したものである。この球のイメージが捉えにくいときには、ストローなどで作ったフレーム型の正四面体の中で球状の風船を膨らませた模型を用意して、観察させるとよい。

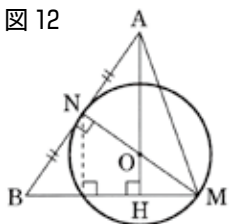
図 11



正四面体の辺に接する球の直径は、正四面体の向かい合う 2 辺の中点を結ぶ線分の長さであることを見いだすことができる。

面 ABM で考えれば、図 12 のようになる。このとき、O が MN の中点になっていることは、 $\triangle OAN \cong \triangle OMH$ に注目した計算でも確かめられるし、N から BM に垂線をひき平行線と線分の比の性質を用いて 1:1 になることを導いてもよい。

図 12



このようにして、辺に接する球の中心は O に一致することが分かり、球の半径は MN の半分の長さとも一致するので、 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ となることがわかる。

なお、今回話題にした接球の半径を小さい方から、 r_1, r_2, r_3 として比較してみると、 $r_1:r_2:r_3 = 1:\sqrt{3}:3$ となる。つまり、内接球の半径を基準にして $\sqrt{3}$ 倍するごとに、辺に接する球、外接球が得られるということも見いだされる。

6. おわりに

今回取り上げた課題は、中学生にとって易しいものではないが、興味を持つ生徒も多いと思うので、実態に合わせて授業者が導入や展開を工夫していただきたい。

今回は、既習事項をフルに使って横断的に学び直す機会をつくることも意味のある活動の 1 つとなるのではないかと提案をさせていただいた。

最後に、大学入試問題を 1 つ紹介しておこう。今回取り上げた正四面体の外接球についての探究を理解した生徒ならば、解決することは可能だと思う。先生方も、ぜひ数学的活動を楽しんでいただきたい。

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは、 $AB \times \sqrt{3}$, $AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

(2001 年 東京大学)



〒135-0063 東京都江東区有明3-4-10 TFTビル西館

URL <https://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

TEL 03-5579-6278(代表)

令和4年(2022年)11月 発行

本資料は、令和3年(2021年)5月まで発行していた「中学数学通信 coMpass」を再編集してまとめたものです。発行当時の情報が一部記載されていることをご了承ください。

本資料は、文部科学省による「教科書採択の公正確保について」に基づき、一般財団法人教科書協会が定めた「教科書発行者行動規範」ののっとり、配布を許可されているものです。