



コンパス CoMpass

連載「数学的活動へのイノベーション」
コラム集 No.2

CONTENTS

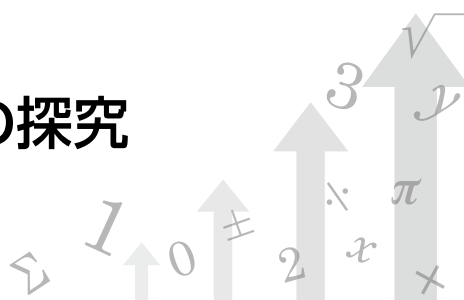
貴重な文化財『算額』の探究	…2
続・『算額』の探究	…5
一般化すると見えること	…8
円柱の缶を束ねて持ち運ぶには？	…11
大学入試から学ぶ思考力	…14
授業中に受けた質問を題材として	…17
座標平面上の図形問題を題材として	…21

連載：数学的活動へのイノベーション

貴重な文化財『算額』の探究

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]



1. はじめに

和算を発達させた1つの契機ともなった「算額」は、数学の問題が解けたことを神仏に感謝し、ますます勉学に励むことを祈念するとともに、人々の集まる神社仏閣を発表の場として、特に江戸時代に多く奉納されたといわれている。このような習慣は、世界にも例がなく日本独特の文化として世界からも注目されている。

中学校や高校の教科書を調べると、和算に関する内容がいろいろと取り上げられている。また、全国学力・学習状況調査（平成24年度）においても、有名な和算書である「塵劫記」から、相似を利用して木の高さを測定する問題が出題されたことがある。

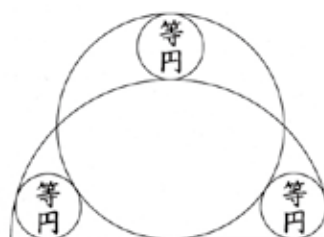
難しい問題も多いのだが、中学生にも探究できそうな問題を選別し、授業やレポートの課題として取り上げることにより、先人である江戸時代の人々が楽しんだ数学に触れることで、生徒たちが数学に対してよりいっそう身近に感じるきっかけとすることができるのではないかと考えている。

本稿では、本校の中学3年生が昨秋に実施した修学旅行（奈良・京都）の際に、Mくんたちの班が入手した「算額問題」への探究の一端を紹介したいと思う。

2. 生徒が修学旅行で入手した問題より

今回取り上げるのは、京都市中京区三条通に鎮座する武信稲荷神社に奉納されている算額（嘉永6年）の中の第2問である。（ちなみに、この年は、アメリカのペリー提督が黒船で来航したことで有名である。）

図1



「今有如圖半圓與中圓相交容等圓三个
只云中圓徑一寸問等圓徑幾何

答曰 等圓徑二分九厘二毛余

術曰置五分開平法以減一个乗中徑得
等徑合問」

上記のように、「算額」の問題は漢文で書かれたものが多く、しかも旧字体が混じっているのが、書き下し文にするのも一苦勞である。（この解説が面白いという生徒もいるが、本稿では、これらの読み方について解説することが主眼ではないので、その詳細は省略する。）

この問題の現代語訳は次のようになる。「半円と中円が交わり、図のように3個の等円が内接している。中円の直径が一寸のとき、等円の直径を求めよ。」

ちなみに「答」は、およそ 0.292 寸であり、 $(1 - \sqrt{0.5}) \times (\text{中径})$ を計算することにより得られることが「術」に示されている。

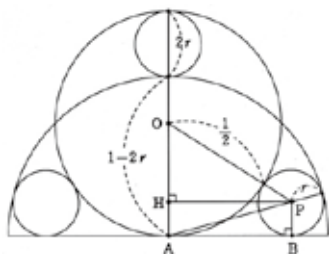
なお、和算においては、求めるものが「半径」ではなく「直径」であることに留意する必要がある。

3. 部分的に範囲外の内容になるが…

現行の学習内容においては、2 円の位置関係が中学校に位置づけられていないので、この問題は解く過程で部分的に範囲外となってしまうのが難点であるが、生徒の実態に応じたヒントや助言を適宜加えながら、解決に向けた探究を進めることは可能だと思う。先生方も、まずご自身で取り組みながら、生徒の実態に合わせた指導案を練ってみたい。

2 円の位置関係や 2 円の共通接線の長さなどについての知識がある場合には、下のような解法が考えられる。

図 2



<解法1>

図 2 において、等円の半径を r とすると、中円の直径は 1 だから、

$$OH = \frac{1}{2} - r, \quad OP = \frac{1}{2} + r$$

これをもとにして、 $AB = HP = \sqrt{2}r$

また、 $AP = (1 - 2r) - r = 1 - 3r$, $PB = r$

よって、直角三角形 ABP において三平方の定理より $r^2 + (\sqrt{2}r)^2 = (1 - 3r)^2$

これを整理して $8r^2 - 8r + 1 = 0$ より

$r = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$ を得る。ここで、

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{4} > \frac{1}{2}, \quad 0 < \frac{2 - \sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2} \text{ より}$$

条件を満たす r は $r = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ となり、

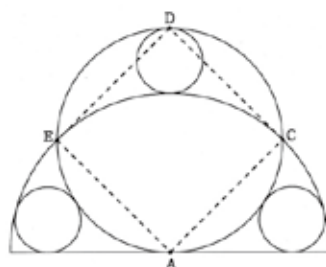
等円径は $\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \times 2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ となる。

よって、この値の近似値は 0.2929 となり、「等円径二分九厘二毛余」と一致する。

上記の解答に至るまでには、かなりのヒントや助言が必要な場合もあると思われるが、答にたどり着いたときにはそれなりの満足感が得られるはずである。

今回の授業で面白かったのは、上記のような解法により解決したところで、M さんから次のような発言があったことである。「図 3 において、四角形 ACDE は正方形になるのでは？」

図 3



「もし、それがいえるなら、等円の直径はもっと簡単に求めることができる」と言って、以下の説明を始めた。

<解法2>

図 3 において、四角形 ACDE が正方形だとすると、

$\triangle ACD$ は直角二等辺三角形となるから、

$$AD = 1 \text{ より}, \quad AC = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、AD と半円との交点を F とすると、

$$AF = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ より}$$

$$DF = AD - AF = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

確かに、<解法1>と同じ結果となる。

4. 四角形ACDEは正方形といえるか？

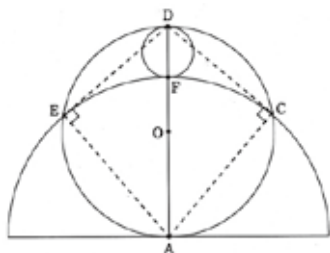
＜解法2＞の結果から、Mくんの予想は正しいのではないかということになった。しかも＜解法1＞の方法に比べるとかなり簡単に求めることができる。

そこで、Mくんの予想である「四角形ACDEは正方形になるのでは？」について、皆で考えることにした。

考察過程のはじめの段階で、生徒たちの多くは、半円と中円および等円の1つ（DFを直径とする円）に着目し、円周角の定理を使って解決しようとしていた。そして、「円周角の定理を使えば、 $\triangle ACD$ や $\triangle OCD$ などが直角二等辺三角形になることが示される」というような意見が出され、一旦はMくんの＜解法2＞が支持された。

しかし、後半になって、その考え方にはおかしいところがあることに気づいた生徒も出てきた。「3点A、O、Dは円Oの直径上の点なので一直線上にあるが、C、O、Eは一直線上にあるとは限らない」という指摘だった。

図4



実際、図4に示したように、彼らが注目した図形（半円と中円および1つの等円）だけでは、一般に、四角形ACDEが凧形（ $AC=AE$, $DC=DE$ ）になることは示せるが、正方形になることまでは無理である。この問題は、3つの等円が内接することが条件となっており、この条件のもとに正方形となるからである。

Mくんの予想は、「術」の記述から読み取ったとも考えられるが、その直観力は大きいに評価できる。Mくんの疑問に、先生方ならばどのように応えてくださるだろうか。

5. おわりに

中学生が算額を通じて、考える喜びや問題を解く楽しさを味わう機会はいろいろと用意されている。

例えば、岩手県一関市博物館が主催している「和算に挑戦」というものがある。毎年12月の初旬に挑戦問題（初級、中級、上級）が発表され、年明け早々の締切日までに答案を作成し応募すると全員に解答集（かなり立派な冊子）がもらえる。正解者は解答集に紹介されるほか、優秀答案の作成者は表彰もされる。中学3年生ならば、中級問題に挑戦させるとよいだろう。

応募形式のものではほかに、日本数学検定協会が昨年からスタートさせた「算額1・2・3」というものもある。ここ2年間は奈良東大寺の大仏に関する出題がされており、こちらは7月が締切である。

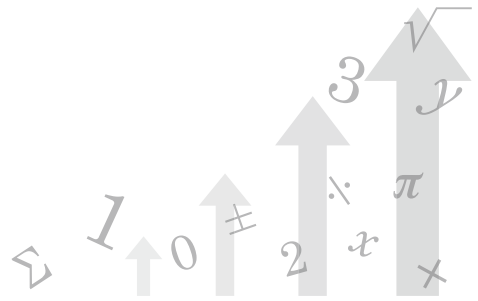
全国には多くの算額が残されている。中学生に紐解ける問題は限られているが、なかなか魅力的な問題も多い。各地区の先生方の協力のもと、それぞれの地域に残されている算額問題の中から選出された手頃な問題を集めれば、かなりやりがいのある素敵な幾何の問題集に仕上がるのではないかなと秘かに期待しているところである。

連載：数学的活動へのイノベーション

続・『算額』の探究

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]



1. はじめに

前回に続き、「算額」の問題について考えていく。

今回取り上げるのも前回と同様に、本校の中学3年生が昨秋に実施した奈良・京都への修学旅行の際に、Nくんたちの班（前回とは別の班）が入手した京都市東山区の清水寺の算額（明治25年奉納）の中の第1問である。この算額には、池内善之助、伊三郎兄弟が師匠である豊田周齋の追悼のために奉納したことが記されている。



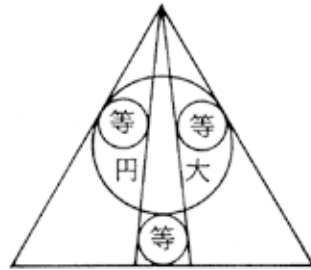
清水寺は「清水の舞台」や「音羽の滝」などで有名であり、世界遺産に認定された古都京都の文化財17か所の1つにも選ばれている寺院である。残念ながらこの算額は一般公開されておらず、寺務所の倉庫に大切に保管されているようだ。したがって、Nくんたちの班も実物を見ることができたわけではないのだが、この班が事前をお願いしておいた「清水寺の清掃体験」の際に、担当して下さった方を通じて算額の写真の写しを頂くことができたのである。

2. 問題の正しい図が判明

筆者もこの算額の存在は周知しており、

例えば「近畿の算額」（近畿数学史学会編著，1992）には、図1のような図と文面が紹介されている。

図1



今有如圖三角内隔斜容大圓一個等圓三個
只云大圓徑一寸間等圓徑幾何

答曰 等圓徑三分八厘有奇
術曰置一個七分五厘名甲自之加一個五分
開平方内減甲餘乘大圓徑得小圓徑合問

（注：原文は縦書きである）

算額の問題を解くときに、意外と苦労するのは「今有如圖…」の部分である。問題の条件の詳細がよくわからない場合があるからだ。この問題も、図1から読み取れる条件で問題を解こうとしても、「答」に至らないので、気になっていた問題の1つでもあった。

ところが、今回、Nくんたちの班が入手した写しを拡大してみたところ、何と図1の図が正確ではないことが判明したのである。写しの拡大図のままではぼやけて見に

くいので、本稿では筆者が新たに書き直したものを図2に示す。特に、接点部分を・で強調しておいた。

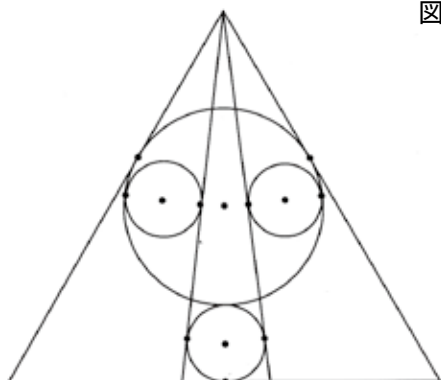


図2

この問題の意味はおおよ次のようになる。「正三角形の中にひかれた2つの線分により、大円1個と等円3個が図のように接している。大円の直径を1寸とすると、等円の直径を求めよ。」

ちなみに、「答」は、「術文」と合わせると、以下のように示されている。

甲 = 1.75 とすると、

$$\begin{aligned} \text{小円径} &= \{ \sqrt{\text{甲}^2 + 1.5} - \text{甲} \} \times \text{大円径} \\ &= \{ \sqrt{1.75^2 + 1.5} - 1.75 \} \times 1 \\ &\doteq 0.38 \end{aligned}$$

(註) 「径」とは「直径」のことである。

3. 既習事項で解くことができるか？

前回は触れたが、現行の学習内容においては、2円の位置関係が中学校の学習内容に位置づけられていないので、この問題も解く過程で部分的に範囲外となってしまうのが難点である。したがって、そういった部分については、生徒の実態に応じた助言やヒントを適宜加えながら、解決に向けた探究を進めていく必要がある。

標準的な解答例を以下に示す。

図3のように点を定め、補助線として垂線AH、大円の半径OD、大円と等円の中

心線OF、等円の半径QGをひく。また、小円の半径を x 、大円の半径を y とおく。(大円の直径は1寸となっているので、文字におきかえなくてもよいのだが、「術」で小円径と大円径の関係を述べているので、ここでは一般的に解くことにした。)

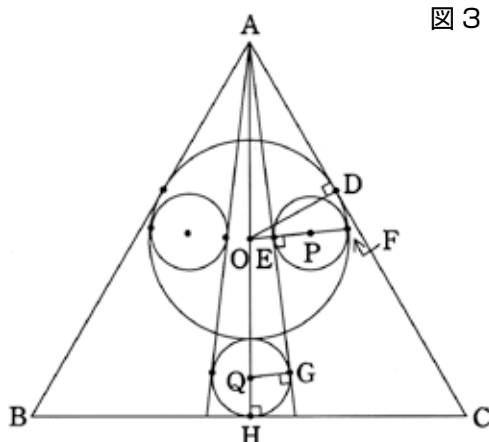


図3

$\triangle A Q G \sim \triangle A O E$ となることに注目して比例式をつくると、 $A Q : A O = Q G : O E$ ここで、 $\triangle A B C$ は正三角形だから、

$\angle D A O = 30^\circ$ より、 $A O = 2 O D = 2 y$

また、 $O E = O F - E F = y - 2 x$

さらに、 $O Q = y + x$ であることから、

$$(2 y + y + x) : 2 y = x : (y - 2 x)$$

これを整理して、 $2 x^2 + 7 x y - 3 y^2 = 0$

さらに、 y は定数なので、 x の2次方程式として整理して、 $2 x^2 + 7 y x - 3 y^2 = 0$

$$\text{これを解いて、} x = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4} y$$

$$0 < x < \frac{1}{2} y \text{ より、} x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{4} y$$

となる。よって、小円の直径 $2 x$ は

$$2 x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{4} \times 2 y \text{ となり、} 2 y = 1 \text{ のとき、}$$

確かに $2 x$ (小円径) $\doteq 0.38$ となる。

後半の部分で、文字係数の2次方程式を解くことになるが、この部分が難しければ、方程式を整理した段階で、 $y = \frac{1}{2}$ を代入して解いてもよいであろう。

4. もう一つの数学的活動

0.38 という結果を得るまでもひと苦労であったが、ここで気になったのが、我々が解いた「解」と「術」に示されている式との違いである。今回は、この部分も数学的活動の場面の1つとすることにした。

1.75 や 1.5 は何を計算したものなのだろうか。小グループに分かれた検討が進んだ。

しばらくすると、いくつかのグループで $\frac{7}{4} = 1.75$ の関係に気づくことができた。根号の中の仕組みに気づくには少し時間を要したものの、 $\frac{7}{4} = 1.75$ の関係がヒントにもなって、最終的には多くのグループが無事に紐解くことができた。念のため、Sさんが発表した計算式を添えておく。

$$\begin{aligned} \frac{-7 + \sqrt{73}}{4} &= \frac{\sqrt{73} - 7}{4} = \frac{\sqrt{73}}{4} - \frac{7}{4} \\ &= \sqrt{\frac{49 + 24}{16}} - \frac{7}{4} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}} - \frac{7}{4} \\ &= \sqrt{(1.75)^2 + 1.5} - 1.75 \end{aligned}$$

5. 「和算に挑戦」へのチャレンジ

ところで、清水寺の算額の問題に取り組んでいた昨年の11月頃、前回も触れた、岩手県一関市博物館が主催している「和算に挑戦」への応募対策への準備をしていたところ、中級問題の過去問題の中に、今回取り組んだ算額問題と同じような手続きでできるものを見つけた。

中級問題は、「中学・高校生向き」となっているが、12月中に「三平方の定理」までの学習が終了していれば、中学3年生でも十分に取り組むことができ、応募可能である。

<平成26年度 中級問題>

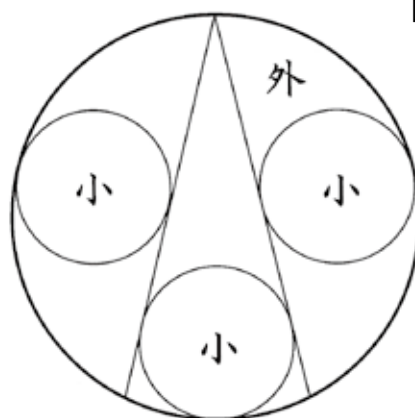
外円内に、図のように合同な小円が3個入っています。弓形に接する左右の

小円は弦の中点で接しています。

外円の直径が1寸のとき、小円の直径を求めなさい。(図4)

※文政13年(1830)年刊『算法新書』の問題をもとにしました。

図4



この問題も、適切な補助線をひくことにより、相似な三角形を見だし、辺の相似比から大円径と小円径の関係式を導くと、2次方程式ができる。最後は、解を吟味して、答えは $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ となる。

清水寺の算額に取り組んだ生徒たちにとっては、よい復習問題になった。

6. おわりに

限られた授業時数の中で、あれもこれも取り上げるわけにはいかないので、興味ある問題は、例えば「チャレンジ問題」として掲示し、レポート課題とするなどの工夫により、意欲ある生徒たちに提供していくという方法もあるだろう。

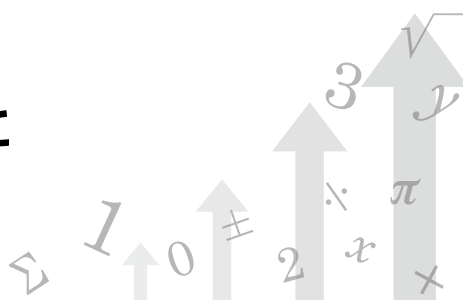
今年の「和算に挑戦」はどのような問題となるだろうか。3ヶ月後が楽しみだ。

連載：数学的活動へのイノベーション

一般化すると見えること

吉野 茂

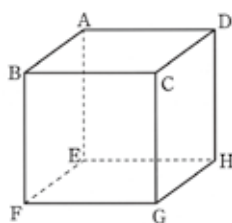
【東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭】



1. はじめに

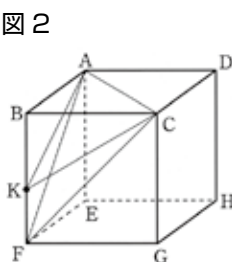
現在使用している 図 1

中学校 1 年の教科書に、図 1 のような立方体の 3 つの頂点を結んでつくった三角形が直角三角形になるものを考える場面がある。(1 年 6 章 p.232 「章の問題」)



また、中学校 2 年 図 2

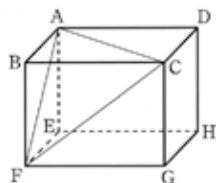
の教科書には、図 2 のように、立方体の切り口である $\triangle ACF$ や $\triangle ACK$ がどんな三角形になるかを説明する活動を行う場面がある。(2 年 5 章 p.175 「ジャンプ」)



これらについては、3 年生になって三平方の定理を学べば、その面積も求めることが可能であり、これらは高校入試問題においても頻出事項の 1 つとなっている。

しかし、題材が図 3 図 3

のように直方体になると、中学生にとってはなかなか難しい課題となる。



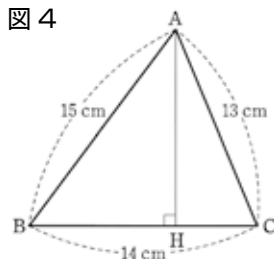
例えば、図 3 の 3 点 A, C, F を結んでできる $\triangle ACF$ は、一般

的には不等辺三角形になるからだ。

しかし、不等辺三角形であっても、三角形の 3 辺の長さがわかっているときには、三平方の定理を使ってその面積が求められることを理解することは大切で、このことは中学校 3 年の教科書 (3 年 7 章 p.217 「章の問題」) にも登場する。ただし、深入りせず、

図 4 のように 3 図 4

辺とも整数でかつ高さも整数になるように準備された限定的な場合の考察であり、一般的には高校における三角比に関する定理の学習を待つことになる。



したがって、高校入試において出題する場合、例えば図 3 においては、 $AB = BF$ のような条件をつけて、対象となる三角形が二等辺三角形になるように工夫しているものが多い。

しかし、公立高校の入試問題の中には、不等辺三角形になる切り口の面積について、うまく誘導しながら求めさせることに挑戦したものもある。前置きが長くなったが、今回はこのような問題について考察してみたいと思う。

2. 切り口が不等辺三角形となる面積

右下の図（図5）のように、 $AB = 2\text{cm}$ 、 $AD = 3\text{cm}$ 、 $AE = 2\sqrt{3}\text{cm}$ の直方体があり、点Aから線分BEに垂線をひき、BEとの交点をPとする。このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。＜2013 佐賀県＞

(1) $\triangle BDE$ の面積

を求めるため

に、次のよう

に考えた。

このとき、

ア～エ

およびカに

あてはまる数

を、オにあて

はまる記号を書きなさい。

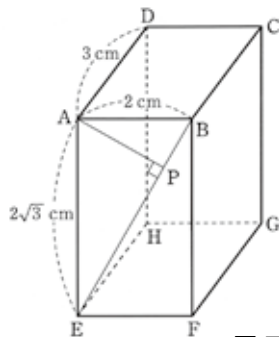


図5

$BE = \text{ア}$ cm なので、 $AP = \text{イ}$ cm となる。

$\triangle ADP$ において $\angle DAP = 90^\circ$ なので、

$DP^2 = \text{ウ}$ cm $\cdots$ ①

また、 $BP^2 = \text{エ}$ $\cdots$ ②、 $BD^2 = 13$ $\cdots$ ③

①、②、③より $BD^2 = BP^2 + DP^2$ が

成り立つので、 $\triangle BDP$ は $\angle \text{オ} = 90^\circ$

の直角三角形である。

よって、 $\triangle BDE$ の面積は カ cm^2 となる。

(2) 三角すい $ABDE$ について、 $\triangle BDE$ を底面としたときの三角すいの高さを求めなさい。

以下、誌面の都合上、本稿では上記の(1)についてのみ考察する。

図6に示したようにこの問題で対象となる $\triangle BDE$ は不等辺三角形であり、しかも、辺の長さには根号がついた数も含

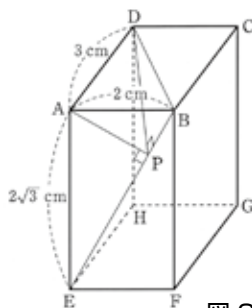


図6

むので、うまく計算を進めないと大変である。

この入試問題の誘導のポイントは、三平方の定理の逆を用いて、 $\triangle BDP$ が直角三角形になることから、 $DP \perp BE$ を導き、三角形の面積の公式を用いて $\triangle BDE$ の面積を求めている点である。

3. 一般化してみよう

$DP \perp BE$ はいつでもいえることなのだろうか。この点については、高校で学ぶ「三垂線の定理」を利用すれば明らかであるが、ここでは、入試問題の流れに沿って一般化をしてみよう。（図7）

右の図のように、

$AB = x$ 、 $AE = y$ 、

$AD = z$ とおくと、

$BE = \sqrt{x^2 + y^2}$

となる。

また、 AP については「相似の考え」か「面積」に着目すると、

$AP = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ となる。

さらに、

$$DP^2 = \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{x^2 + y^2} \quad \cdots \text{①}$$

$$BP^2 = \frac{x^4}{x^2 + y^2} \quad \cdots \text{②}$$

$$BD^2 = x^2 + z^2 \quad \cdots \text{③}$$

となり、①、②、③より

$$\begin{aligned} & BP^2 + DP^2 \\ &= \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}{x^2 + y^2} \\ &= x^2 + z^2 = BD^2 \end{aligned}$$

よって、 $\triangle BDP$ は確かに $\angle BPD = 90^\circ$ となる直角三角形であり、 $DP \perp BE$ とな

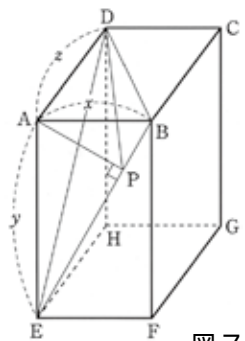


図7

ることが証明できる。

したがって、 $\triangle BDE$ の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times BE \times DP \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \times \frac{\sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2} \quad \cdots ※ \end{aligned}$$

となる。

4. 一般化して見えるもの

一般化して得られた結果は、思いの外きれいな式となったが、もう少し整理すると次のようにもまとめられる。

$$\triangle BDE = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2} \text{ の両辺を}$$

2乗すると

$$\begin{aligned} (\triangle BDE)^2 &= \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 + \left(\frac{1}{2}yz\right)^2 + \left(\frac{1}{2}zx\right)^2 \\ (\triangle BDE)^2 &= (\triangle ABE)^2 + (\triangle ADE)^2 + (\triangle ABD)^2 \end{aligned}$$

すなわち、「頂点 A に3つの直角が集まる三角錐 ABDE において、直角を含まない面 $\triangle BDE$ の面積の2乗は、他の3つの直角三角形の面積の2乗の和に等しい」という関係があることがわかる。

結果を得るまでの途中の計算式には、分式など一部に中学校の学習範囲を超えてしまうところもあるように思うが、丁寧に導けば、中学生にも理解させることはできるであろう。

5. デカルト・グアの定理

今回考察の対象となった立体、すなわち、1つの頂点に3つの直角が集まっている三角錐を

「3直角四面体」と呼ぶことがある。(図8)

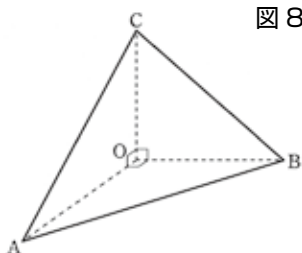


図8

また、「3次元空間におけるピタゴラスの定理」ともいうべき今回の結果は、実は、古くから知られている定理で、日本では、「デカルト・グアの定理」と呼んでいる。(註：外国の文献には「De Gua's theorem」と表現されているものを多く見かける。)

＜デカルト・グアの定理＞

四面体 OABC において、

$$\triangle OAB = S_1, \triangle OBC = S_2, \triangle OCA = S_3,$$

$$\triangle ABC = S \text{ とする。}$$

$\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ が 90° のとき、

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

が成り立つ。

今回は、入試問題の流れに沿った証明を試みたが、図5の点Pを使わずに、点Dから直接BEに垂線をひいた垂線の足を利用し、図4の考え方にしたがって、 $\triangle BDE$ の面積を求めることもできる。

この定理を証明によって導くことが難しい生徒に対しては、具体的な数値の立体をいくつか扱うことを通して、この定理の不思議さを味わわせることもできるであろう。

ちなみに、三平方の定理とは違い、この定理の逆は成り立たないことも興味ある課題の1つである。

6. おわりに

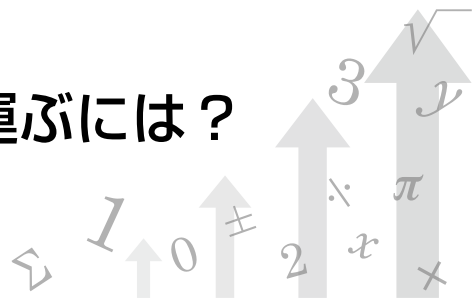
中学校3年間の学習の中には、文字を使うことによって、具体的な数値の計算では見えない構造を確認する場面がいくつかあるが、今回考察した題材もその1つといえる。中学生にはやや難しい面もあるが、生徒の実態に応じてうまく導けば、思考力、判断力、表現力等を身に付けるためのよい教材にもなるのではないかと思う。今後の実践により教材研究を進めていきたい。

連載：数学的活動へのイノベーション

円柱の缶を束ねて持ち運ぶには？

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]



1. はじめに

この7月に公表された次期学習指導要領の解説書 p.6 には以下のような記述がある。「中学校数学科においては、数学的に考える資質・能力を育成する観点から、現実の世界と数学の世界における問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることを意図して数学的な活動の一層の充実を図った。」

これは、算数・数学が「できる」「わかる」だけではなく、算数・数学を「創る」ことや「使う」ことができるように、問題解決の際には、数学的なプロセスにも焦点を当てて指導していこうというメッセージでもあると受け止めることができる。

また、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進ということも求められている。ただし、その際の留意点の1つとして、「児童生徒に求められる資質・能力を育成することを目指した授業改善の取組は、既に小・中学校を中心に多くの実践が積み重ねられており、特に義務教育段階はこれまで地道に取り組まれ蓄積されてきた実践を否定し、全く異なる指導方法を導入しなければならないと捉える必要はないこと」という記述もある。

新たな教材開発も必要であろうが、これまでに行われてきた実践を今回の改訂の主旨に合わせて再構築していくことの研究も

大切なのではないかと考える。

なお、「指導計画の作成と内容の取り扱い」の3では、「数学的活動の取組における配慮事項」として、「各領域の指導に当たっては、観察や操作、実験などの活動を通して、数量や図形などの性質を見いだしたり、発展させたりする機会を設けること」という項目が新設されていることにも留意しておきたい。



今回取り上げる題材は、課題学習の1つとして、かなり以前から話題にされていたものの1つであり、既に多くの実践例もあると思われるが、特に若い先生方への教材開発のヒントにもなるのではないかと考え、ここに紹介することにした。

2. 缶を束ねて持ち運べるか？

<問題>

円柱形の缶を紐で束ねて、持ち運びができるようにしたい。どのように並べて束ねたらよいだろうか。

<準備>

- ① 小さな円板（コインやゲームで使用するチップなど、机上で操作できるものがよい。）
- ② 円柱の立体模型（工作用の小さなもので

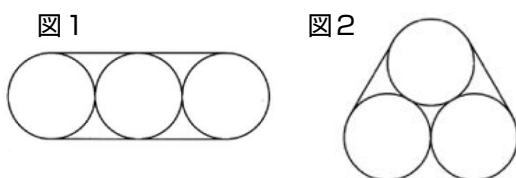
よい。筆者の地元では $\phi 30\text{mm} \times$ 高さ 30mm の円柱 12 個入りを 100 円で入手できた。）

※ ①、②は 1 人に 6 個以上配布できるように準備したい。なお、②の円柱の模型は、授業の後半において一連の考察の検証のために用いるようにしたい。

※ ②を束ねる際には、輪ゴムを使用するといろいろな場合を確かめるのに都合がよい。

さて、考察に入ろう。缶が 1 本や 2 本の場合は問題ないと思うので、缶が 3 本以上の場合について順に調べていくことにする。以下、缶の底面の円の半径を r として考えることにする。

3 本の並べ方の平面図は、図 1 や図 2 のような場合が考えられるが、図 1 のような束ね方では持ち運ぶことができないことは容易に理解できるであろう。持ち運びができるようにするには、少なくとも束ねる紐の長さを最短にする必要がある。



4 本の場合にはどのように配置すればよいだろうか。1 列に配置した場合を除くと、例えば図 3 や図 4 のような並べ方が考えられる。

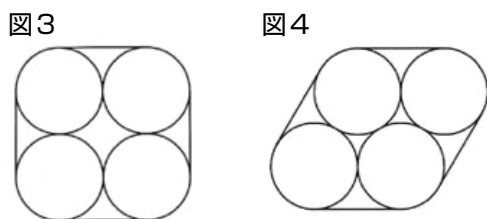
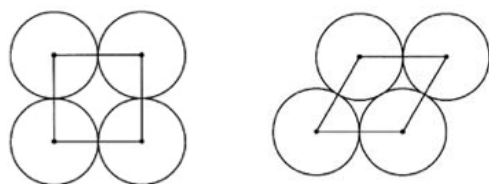


図 3 と図 4 の場合について、実際に紐で

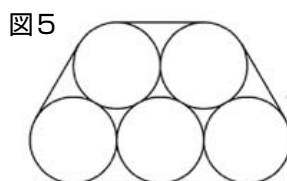
束ねてみると、すき間の面積が小さく接点の多い図 4 の方が安定する。したがって、周囲の長さも図 4 の方が短くなると考える生徒がいるかもしれないが、図 3 と図 4 では束ねる紐の長さは同じである。よって、どちらの場合も紐は緩まず、持ち運ぶことができる。

周の長さを求めるときには、「対話的な学び」を通して、以下の点を生徒が自ら見いだすようにしたい。

- ① 缶の本数が増えても、曲線部分の紐の長さは 1 本の缶の周りの長さ $2\pi r$ であり変化しない。
- ② 直線部分の長さは、円の中心を結んだ線分の長さと等しい。因みに、これは円の直径 $2r$ と一致する。



5 本の場合には、図 4 の配置に 1 本を加えた図 5 のような場合に、束ねる紐の長さが最短となり安定する。



ここまでの考察を表に整理すると、右下のようになる。このような整理は、以降の考察の見通しを立てるのに役立つが、帰納的な推論は常に成り立つとは限らないことを知る機会にもなる。

缶の個数	紐の長さ
1	$2\pi r$
2	$2\pi r + 4r$
3	$2\pi r + 6r$
4	$2\pi r + 8r$
5	$2\pi r + 10r$

3. 6つの缶を束ねて持ち運べるか？

6本の場合にはどのように配置すればよいだろうか。

これまでの考察より、図6のような配置がよさそうだと考える生徒も多くいるで

あろう。これだと、紐の長さが $2\pi r + 12r$ となって、予想とも一致する。

この他にも、図7や図8のような配置が考えられるが、これらの紐の長さも皆 $2\pi r + 12r$ となる。

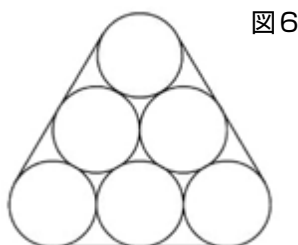


図6

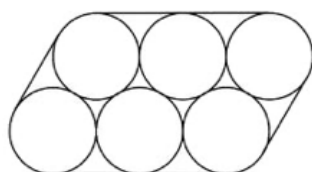


図7

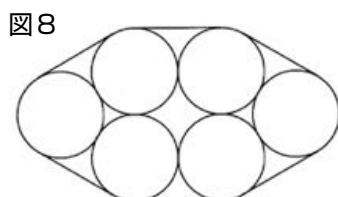


図8

このあたりの考察まで進んだら、実際に円柱を使って作業をさせてみるとよい。

「これで一件落着」としたいところであるが、実はそうはいかない。6缶については、図9のように、紐の長さがもっと短くなる場合があるからだ。このような意外性のある課題は、探究心を掻き立てることができる。

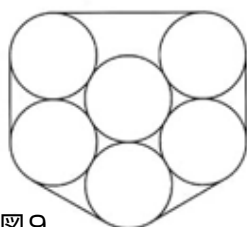


図9

生徒によっては、円柱による操作をする前の段階でこの事実気づく場合もあるだ

ろう。計量計算は、中学校3年生の三平方の定理の学習まで待たなければならないが、大小関係だけであれば中学校1年生（小学生）でも理解は可能である。

この課題は、「深い学び」の可能性がまだまだ続く。図形の対称性に着目して、図10の場合に紐の長さが最短となるのではないかと考える生徒がいるかもしれない。

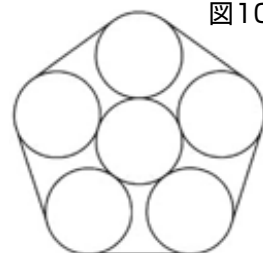


図10

このときの紐の長さは $5\sqrt{10} - 2\sqrt{5}r$ となるので、中学生にはちょっと難しいが、正五角形の対角線の長さについては、教科書の『自由研究』でも扱っているので、二重根号の一手手前の段階を近似値で処理すれば解決することは可能である。若干であるが、図9の場合より長いことが判明する。

生徒によっては、7つ以上の缶の場合について、6缶の場合と同じようなパターンになるものがないかどうかを探究したり、新たな規則性を見いだそうとしたりするかもしれない。

4. おわりに

今回紹介した課題は、小学生から高校生まで、いろいろと楽しめる題材である。

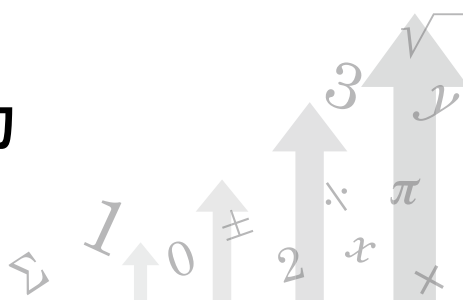
本稿では誌面の都合もあり、題材の紹介と大まかな展開のみを示すに留めたが、これをどの学年のどのような生徒を対象とするか、また何を目標として授業を行うかによって、いろいろな展開が考えられると思う。各学校段階の指導者によってそれぞれ工夫していただければ幸いである。

連載：数学的活動へのイノベーション

大学入試から学ぶ思考力

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]



1. はじめに

筆者が勤務する中等教育学校には、前期生（中学生相当）と後期生（高校生相当）が同居しており、担当する授業内容もかなり広範囲に及ぶ。筆者の場合、今年度は1学年（中学1年相当）と5学年（高校2年相当）の数学Ⅱと数学Bを受け持っている。生徒たちの発達段階も異なるし、指導内容の難易度にも大きな隔たりがある。その分、授業をしていて面白さもあるのだが、教材研究はなかなか大変である。

さて、前期生に対しては、教科書の問題を補充するために、高校入試問題の中から良問を選んで取り組ませることがあるが、後期生も指導している関係から、大学入試問題に接する機会も多いので、前期生にも考えさせたら面白と思われる問題に遭遇したときにはそれを教材とすることもある。

もちろん、文面については前期生にとって困難な場合もあるので、状況に応じて翻訳が必要な場合があるが、高校入試とはまたひと味違った思考力を磨くことができるのではないかと感じている。

次期学習指導要領のテーマである「主体的・対話的で深い学び」に関わる教材作成におけるヒントにも結びつくのではないかと考え、今回は中学生にも手の届きそうな問題の中から2つ紹介してみようと思う。

2. 角が等しくなるように動く点？

<問題1>

座標平面上の3点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, -1)$ に対し、 $\angle APC = \angle BPC$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし、 $P \neq A, B, C$ とする。

この問題は、中学校3年・第6章「円」の学習を終えた後であれば扱うことができる。「軌跡」という用語は中学校数学において登場しないが、「一定の条件を満たす点が動いてできる図形」のことであるから、内容的には中学校の教科書の本文にも記載されていることがらである。

この問題は、図1のような図をかくことから始めることになるだろうか。

大学入試

の答案としては、余弦定理かベクトルの内積などを利用し、軌跡を方程式で表現することになるであろう。高校生としてはそのような解決の方法によさを見いだすわけであるが、中学生としては、実際に図をかき試行錯誤しながら、条件を満たす点を探し

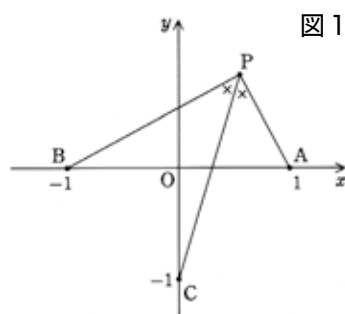


図1

ていくことに面白さを見いだすことができる問題ではないかと考える。

本問で用いる既習事項は、以下のようなものが考えられる。

「2点 A, B から等しい距離にある点」

(中 1 p.175)

「三角形の内角と外角」 (中 2 p.113)

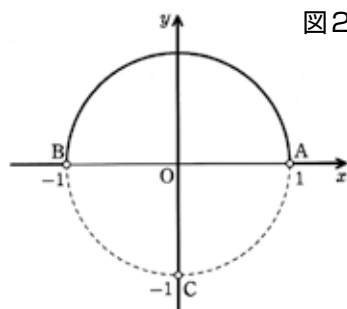
「二等辺三角形の頂角の二等分線」

(中 2 p.147)

「円周角と弧」 (中 3 p.179)

「円周角の定理の逆」 (中 3 p.182)

さて、この問題の正解は、図2の太線部分のようになる。



生徒たちが最初に発

見するのはどの範囲だろうか。また、Pの動く範囲をもれなく指摘できるだろうか。さらに、解答に示された3つの範囲以外にはありえないことを、中学生なりに説明できるだろうか。

自分の考えをしっかりとせつつ、それらをもとにして皆で話し合う活動を大切にしていけば、授業は自然と盛り上がっていく問題の1つなのではないだろうか。

3. 独立に動く2点に連動する点？

<問題2>

1 辺の長さが1の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を、点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき、線分 PQ を 2:1 に内分する点 R が通る範囲の面積を求めよ。

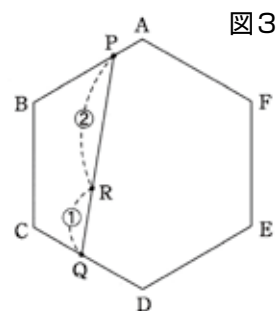
本問について、「点 R の範囲」のみであ

れば、中学校3年・第5章「相似な図形」の学習を終えた後で対応可能であるが、「面積」までを扱うのであれば、第7章「三平方の定理」の学習を終えた後となる。

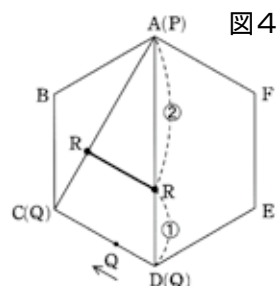
本問の場合、大学入試の答案としては、ベクトルを用いて内分点の存在範囲が示す図形を確認するのがよいであろう。高校生としてはそのような解決の方法によさを見いだすわけであるが、中学生には、そのようなツールはない。

本問の前半部分で用いる中心となる既習事項は、「三角形と比 (2)」(中 3 p.149)であり、これを動的に捉えればよい。

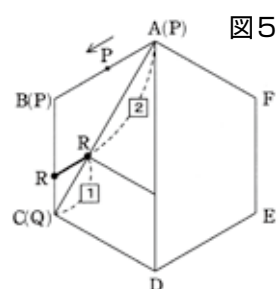
本問がやっかいなのは図3に示すように P, Q という2つの点が動いてしまうことである。



両方を一度に動かすと混乱してしまうので、まずは、図4に示すように、PをAの位置に固定し、QのみをDからCまで動かすことを考えてみよう。



RはPQを2:1に分ける点なので、QのみをDからCまで動かすと、Rの動いてできる図形は辺DCに平行な線分となる。



次に、図5のようにQをCの位置に固定したまま、Pの方をAからBまで動かしてみよう。

先ほどと同様に考えると、Rの動いてできる図形は辺ABに平行な線分となる。

さらに、図6のようにPをBの位置に固定したまま、QをCからDまで動かすと、Rが動いてできる図形は辺CDに平行な線分となる。

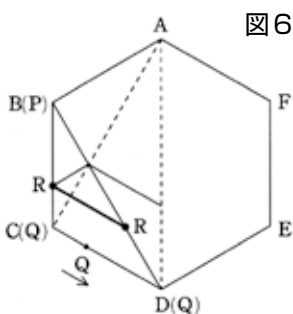


図6

そして、図7のようにQをDの位置に固定したまま、PをBからAまで動かすと、Rが動いてできる図形は辺BAに平行な線分となる。

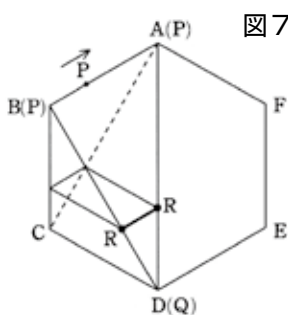


図7

以上のことから、点Rが動いてできる図形は平行四辺形であることがわかる。厳密には、点Rがこの内部をすき間なく動くことを確かめる必要がある。

例えば、図8のように最初に固定する点Pを辺ABの中点にとると、Rの動いてできる図形は辺DCに平行な線分であり、この平行四辺形の内部に含まれることがわかる。

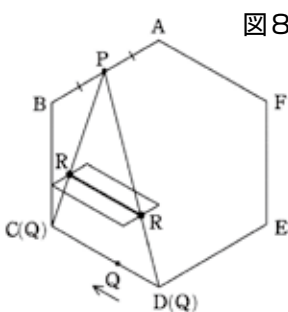


図8

最後に、面積について考察しよう。点Rが動いてできる平行四辺形の長辺と短辺は、それぞれもとの正六角形の1辺の $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ で

あり、長辺と短辺のなす鋭角は 60° であることが確認できる。したがって、「三平方の定理」が学習済みであれば、面積については容易に求めることができるであろう。

もとの正六角形の何分のいくつになるかという問いに変更すれば、面積比のよいおさらい問題にもなる。

問題2に対するヒントや誘導をどこまで行すべきなのは生徒の実態にもよるが、解決の中で用いた「独立して動く2文字の1つを固定する」という考え方は、将来の大学入試問題を攻略する上では大切にしておきたい数学的思考法の1つである。多くの文字や要素が含まれているときには、1つの文字や1つの要素に着目すると、うまく整理して考えられるようになるのと同じようなことである。

4. おわりに

高校受験を控えた中学3年生を担当されている先生方であれば、教科書の内容をいかに早く終わらせるかが重大な関心事で、余計なことをやっている暇などないとお叱りを受けるかもしれない。(筆者も長年、中学校の現場にいたのでその気持ちはよくわかる。)

しかし、時には適切な時間を確保して、それまでに培った思考力を総稼働させながら、皆で考え学び合えるような課題に取り組ませることも大切にしていきたいものだ。

なお、今回は変な先入観にとらわれないように、出典を明らかにせずに考察してきたが、これらの問題は実はどちらも東京大学文系の入試問題(問題1:2008年度, 問題2:2017年度)である。

中学生にはちょっと難しい箇所もあったかもしれないが、今後の教材開発への参考にしていただけたら幸いである。

連載：数学的活動へのイノベーション

授業中に受けた質問を題材として

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主任教諭]

1. はじめに

授業中に、その時間のねらいとは異なる予定外の質問を受けることがある。明らかに、中学校数学を超えたツールを利用しなければ解決できないものはその旨を伝えることになるが、後の章で学ぶことになるものは、その予告くらいはしておくこともある。ただし、工夫をすれば、その学習段階でも解決できる場合があることに留意したい。「この問題を解決するツールは○○○」と思い込んでいると、せっかくの題材を無駄にしてしまうこともあるからだ。

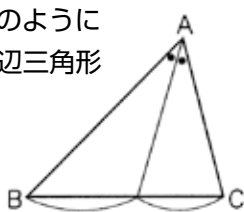
今回は、中学3年の「角の二等分線の性質」の学習中に受けたある質問事項について考えていこうと思う。

2. 角の二等分線から見いだす新たな性質

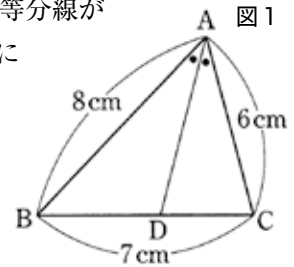
第3学年の5章では、三角形の内角の二等分線の性質を導くために次のような課題(p.150～151)に取り組んでいる。



(前略) 右の図のように $\triangle ABC$ が二等辺三角形でないとき、 $\angle A$ の二等分線は辺 BC をどのように分けるでしょうか。



1つ目の課題は、図1の三角形を実際にかいて、 $\angle A$ の二等分線が辺 BC をどのように分けるかを、実測により調べることになるのだが、このときに、 AD の長さについても測ることを試みる生徒がいた。



「実測によると、 $AD=6(\text{cm})$ になりそうだが…」本当だろうか？

不等辺三角形の面積については、中学校数学の最終段階(3年7章 p.217 の問題7)で求めることを扱うから、その続きともいえるこの課題も、「三平方の定理」を活用すれば何とか解決することができそうである。

しかし、それまで待たなければ解決できない課題なのだろうか？

3. 5章「相似」による解決 <その1>

まず、図2のように、 $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$, $DC=d$, $AD=x$ において、 x を求める方法を考えよう。

図3のように、点 D から辺 AB , AC に垂線をひき、それぞれ DP , DQ をひくと、 $\triangle ADP \equiv \triangle ADQ$ より、 $DP=DQ$ となる。

よって、図4のように、垂線によって切り分けられた図形を組み合わせることができる。このとき、 $\angle D'AD = \angle BDC'$ であることに注目しよう。

$\triangle D'AD$ と $\triangle BDC'$ は相似ではないが、上記の角の大きさが等しいことから、図5において、 $\triangle D'AI \sim \triangle BDJ$ となることがわかる。図の中で、 $D'I = xh$ 、 $BJ = ch$ とした部分は、図6のように「基準の三角形」を作り、これをもとに表現している。中学生にとってわかりにくいかもしれないが、具体的な数値の場合であれば、5章3節①「相似な平面図形の面積」(p.157)でも扱っているの、その考え方を丁寧に説明すれば何とかなるであろう。

図2

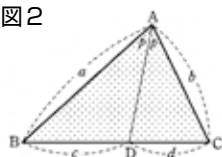


図3

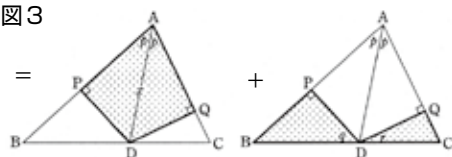


図4

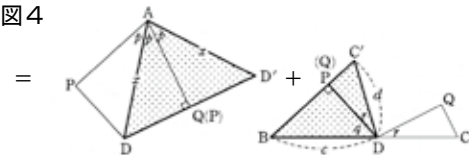


図5

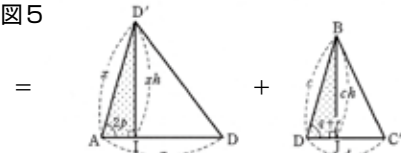
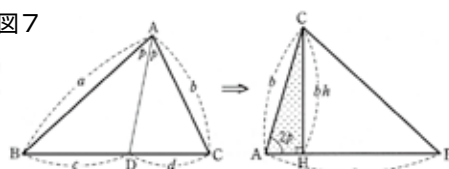


図6



図7



もとの $\triangle ABC$ についても、図7のように向きを揃えて考えることにより、面積について次のようにまとめることができる。

$$\triangle CAB = \triangle D'AD + \triangle BDC' \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}a \times bh = \frac{1}{2}x \times xh + \frac{1}{2}d \times ch$$

式を整理すると

$$h \neq 0 \text{ より } ab = x^2 + cd$$

$$\text{よって、 } x^2 = ab - cd$$

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{ab - cd}$$

以上のようにして、「三角形の内角の二等分線の長さ」を求める公式を導くことができる。とてもシンプルできれいな一般式だ。

実際に、最初の課題にあてはめてみると、

$$x = \sqrt{8 \times 6 - 4 \times 3} = \sqrt{36} = 6(\text{cm})$$

となり、予想通りの結果を得ることができる。

この解法では、図形を裁ち合わせることや共通角を見いだすことへの誘導が必要であるが、計算面でのストレスが少ないという点で優れているのではないかと考える。

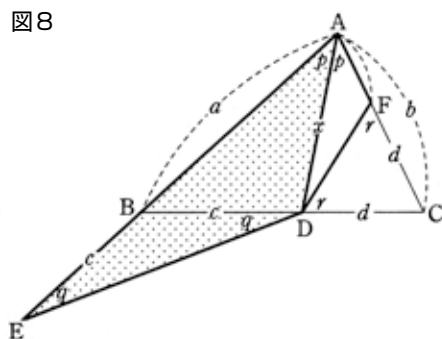
4.5章「相似」による解決 <その2>

次に、補助線を加えることにより、相似な三角形をつくり出す方法を説明しよう。

図8のように、辺 AB を延長した直線上に点 E をとり、 $BD = BE$ とする。また、辺 AC 上に点 F をとり、 $CD = CF$ とする。

さらに、図のように等しい角をそれぞれ p 、 q 、 r とする。このとき、この図の中にある相似な三角形を見いだす活動を行ってみよう。

図8



「三角形の内角と外角」の関係（2年4章 p.113）を繰り返し用いることにより、 $\angle ADF = \angle q$ となることがわかる。このことから、 $\triangle AED \sim \triangle ADF$ となる。

対応する辺の長さに注目して比例式をつくると、

$$(a+c) : x = x : (b-d)$$

$$\text{よって、} x^2 = (a+c)(b-d)$$

$$= ab - ad + bc - cd$$

ここで、 $a : b = c : d$ より $ad = bc$ であることから、上の式の第2項と第3項が消えて、 $x^2 = ab - cd$ を導くことができる。

この解法は、図の設定や途中の文字変換の部分がやや技巧的であるが、これも計算面でのストレスは少ない解法といえるだろう。

5.6章「円」による解決

この課題は、円の中にできる相似を見いだすことによって解決することができる。

まず、図9のように

$\triangle ABC$ の

外接円を

描き、

AD の

延長線と

外接円との

交点をEとしよう。

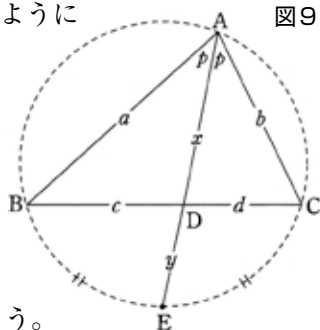


図9

今回の解決には直接影響しないが、点Eが弧BCの中点になることを理解していると、この場面の図を描くときには役に立つ。（3年6章 p.191 の問題4参照）

図10は、図9において

点CとEを結んだ

ものである。

（点BとEを

結んでも

よい。）この

図において、

相似な三角形が

2組あることを

見いだす活動を行ってみよう。

図11はすぐに見つけられると思うが、

図12を見いだすの

には多少時間を

要する生徒も

いるのでは

ないかと

予想される。

図11からは、

次の等式が得ら

れる。

$$\triangle ABD \sim \triangle CED \text{ より } x : d = c : y$$

$$\text{よって、} xy = cd \quad \cdots \textcircled{1}$$

（註：①については、高校数学で学ぶ「方べきの定理」を用いれば即座に結果を示すことができる。）

また、図12からは、次の等式が得られる。

$$\triangle ABE \sim \triangle ADC \text{ より}$$

$$a : x = (x+y) : b$$

$$\text{よって、} x(x+y) = ab$$

$$x^2 + xy = ab \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって、①、②より

$$x^2 = ab - cd$$

この解法は、補助円を用いたり、yを設

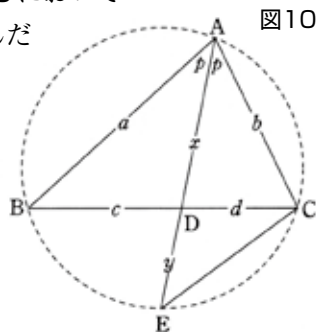


図10

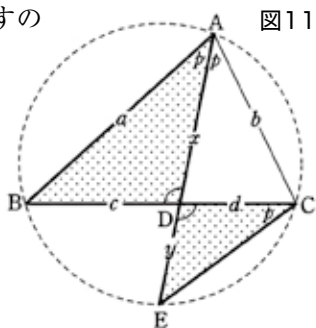


図11

行うことができる点では意味がある。

(註：図 12 の相似の証明は 3 年 6 章 p.191 の問題 4 参照)

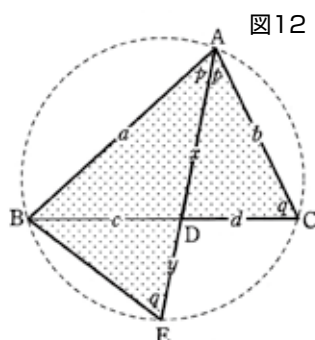


图12

ことを利用して式を

整理すると,

$$x^2 = ab - cd$$

を導くこと

ができる。

この解法

は形式的で

よいが、後半部分でやや複雑な因数分解を含む計算をしなければならないことが難点である。

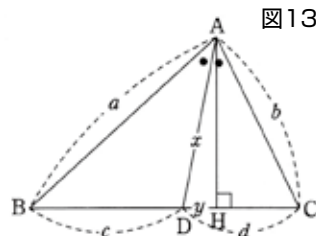


图 13

6.7章「三平方の定理」による解決

三平方の定理が既習事項となると，以下のようにして，これまでよりも形式的な計算処理で解決できるようになる。

図13のように、点Aから辺BCにひいた垂線をAHとし、 $AD=x$ 、 $DH=y$ とおく。このとき、AHを含む3つの直角三角形に着目し、 AH^2 を式に表してみよう。

△ADH について

$$AH^2 = x^2 - y^2 \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABH$ について

$$\begin{aligned}AH^2 &= a^2 - (c + y)^2 \\ &= a^2 - c^2 - 2cy - y^2 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

△ACH について

$$\begin{aligned}AH^2 &= b^2 - (d - y)^2 \\ &= b^2 - d^2 + 2dy - y^2 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

②=③を y について解くと

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(c + d)} \quad \dots \textcircled{4}$$

よって, ①, ②, ④より

$$x^2 = a^2 - c^2 - 2c \times \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(c + d)}$$

ここで、 $a:b=c:d$ より $ad=bc$ である

7. おわりに

これまでに確認したように、「内角の二等分線の長さ」の一般式は、とてもシンプルできれいな形をしている。しかし、高校の教科書においても「公式」としては登場しない。

高校の数学Ⅰ（必修修科目）において「余弦定理」を学べば、より形式的な計算処理で解決できるようになるが、中学校の数学だけでもいろいろな解決方法が考えられることを確認することができた。また、その一部については授業にも生かすことができてよかった。（生徒の実態に応じて、どのような誘導をつけるかは指導の工夫のしどころである。）

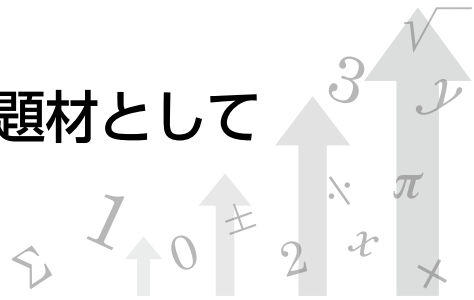
ちょっとした質問事項であっても、それを大切に扱うことによって、よい教材につながる可能性があることを学べたことが今回の大きな収穫である。高校生になって学ぶ新たなツールのよさを理解するためにも、今回のような中学生なりの活動にはそれなりの意味があるのではないかと感じている。

連載：数学的活動へのイノベーション

座標平面上の図形問題を題材として

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主任教諭]



1. はじめに

教科書にはほとんど取り上げられていないが、高校入試においては国公立、私立を問わず出題されることの多い問題の1つとして、座標平面上の図形問題（関数と図形の融合問題）がある。その結果として、中学生が使用する問題集の中には、このテーマの問題が「関数」の中で取り上げられることが多いが、本来、これは解析幾何的な内容であり、中学校の学習指導要領で示されている「関数」のねらいとは目標を異にするものである。

しかし、座標平面上の図形問題が、このように高校入試の中で多く出題される事実は、解析幾何的な内容が中高の接続の面から考えれば重要な視点であることを示唆するものと考えることができるわけで、これを前向きに捉え、数学的活動に位置づけることも意味のあることではないかと思う。

本稿では、誌面の都合上その是非に深入りすることは避けることにして、生徒が実際に直面する問題において、どのような数学的活動が期待できるのかということを、筆者の実践事例を通して、考察していただけたらと思う。

2. 条件を満たす座標を探そう

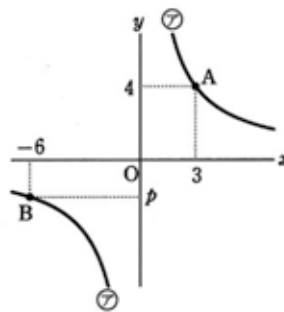
第2学年の1次関数の授業もそろそろ終わりに近づいた頃の演習の時間に、次のよ

うな公立高校の入試問題に取り組む機会があった。

右の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ ……㉞のグラフ上に2点 A(3, 4), B(-6, p) がある。

このとき、次の問いに答えなさい。

- ① a, p の値を求めなさい。
- ② 2点 A, B を通る直線の式を求めなさい。
- ③ 原点を O とし、y 軸上に点 C をとり、△OAC をつくる。△OAC の面積と △OAB の面積が等しくなるとき、点 C の y 座標をすべて求めなさい。



[2016 三重県]

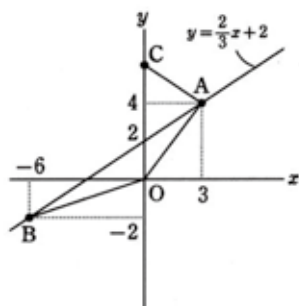
註) 実際の入試問題では、グラフの図は問題文の右に印刷されている。

本稿では、問題①と②の解決がされたものとして、問題③に関する授業でのやりとりを中心に話を進めたいと思う。

まず、問題で要求していることを、座標平面上に整理する必要がある。印刷された

図に記入するのではなく、問題①、②を解くことによって得られた情報をもとに、各自のノートに図1のような図を記入させた。(問題③では、双曲線は必要ないので、省略している。)

図1



この後、3つの定点で囲まれた $\triangle OAB$ の面積を求めることになるが、面積公式を直接使うことのできない面積問題の代表的な方策としては次の3つが考えられる。

I : 「対象図形の $\triangle OAB$ を囲んで削る」

II : 「対象図形の $\triangle OAB$ を分割・合成」

III : 「対象図形の $\triangle OAB$ を等積変形」

このうち、タイプIでは、「長方形で囲む派」と「直角三角形で囲む派」に分かれたが、後者の方が無駄のない計算といえるのではないかとまとめられた。

タイプIIについては、念のため、いくつかの図形に分割したのかを尋ねると、2つと答えた生徒が大半であったが、何と3つと答えた生徒もいて面白かった。また、2つの分割についても、 y 切片を利用した答案と x 切片を利用した答案に分かれたので、それらの解法の優劣についても議論ができた。

グループごとの話し合いの結果、3つに分割するよりも、2つに分割する方が合理的である。また、2つに分割する場合には、1次関数の式から予めわかっているのは y 切片であるので、一般的には y 切片を利用する分割の方が楽なのではないかというような意見に落ち着いた。

なお、タイプIIIについては、誰からも反

応がなかったので、その場では特に取り上げずに、そのまま通過していくことにした。

反応が多かったのはタイプIIであったので、点Cの座標を以下のような流れで求めていくことになった。

〈解答〉

点Cの y 座標を t とする。

直線ABと y 軸との交点をDとすると

$$OD=2$$

$t > 0$ のとき、

$$\triangle OAC = \triangle OAB = \triangle OAD + \triangle OBD$$

であるから

$$\frac{1}{2} \times t \times 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 6$$

$$3t = 18 \quad \text{よって } t = 6$$

よって、求める y 座標は6

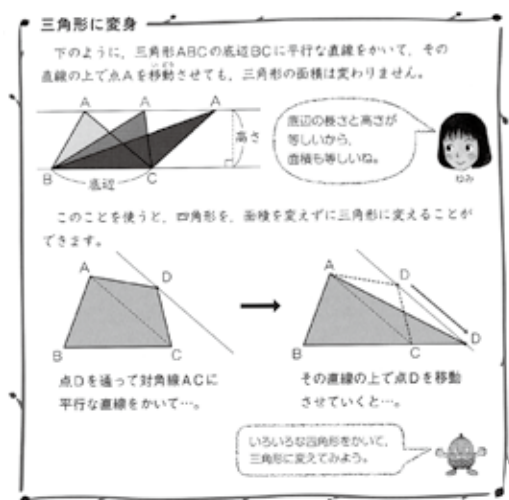
ここまで進んだところで終わりにしていた生徒が多かったが、「問題文に『すべて』とあるよ」というヒントから、原点Oについて点Cと対称な点C'もその候補であることに気づいたグループの発表から、最終的には授業に参加した生徒全員がその意味を理解することができた。

3. 等積変形による解法について〈その1〉

等積変形の考え方は、教科書では第2学年の第5章「三角形と四角形」の最後の方に登場する。学習指導要領で特に示された内容ではないにも関わらず、伝統的にこの場所で扱われている。したがって、第3章「関数」を学習段階ではまだ触れることができないと考えている指導者がいるかもしれない。しかし、「等積変形」のアイデアは、小学校第5学年の教科書をみる限り、既習事項と考えてもよさそうである(次ページを参照)。

そのようなスタンスに立てば、例えば、中学校第1学年の「座標」の学習においても、「等積変形」を振り返りながら「座標」

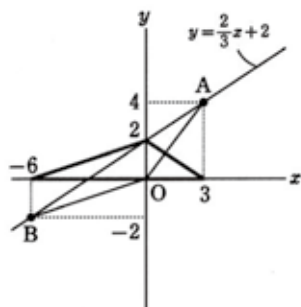
の意味を深めていくような題材が用意できるはずである。後になって必要と思われる「知識・技能」は、機会あるごとに使っていくことも大切ではないだろうか。



(小学校算数教科書 第5学年 p.191)

今回の授業を行ったクラスでは、残念ながらノーヒントではアイデアが発表されなかったが、「等積変形」の学習を振り返り、図2のような変形を行うことにより△OABの面積を求めることにも成功した。この変形により、△OABの面積は面積公式1回で求められることの凄さを体感できたのは大きな収穫であった。

図2



4. 等積変形による解法について〈その2〉

ここまで授業が進んだところで、ある男子生徒が発言した。「この問題は△OABの面積を求めなくても解決できるのではない

か？」最初、周りの級友たちはその意味を理解できなかったが、彼の発表を聞いて、多くの生徒がそのアイディアの凄さに感動した。発表内容の概略は以下のとおり。

完成した図を見ると、 $OA \parallel BC$ となっている。だから、Cの座標を求めるには、点Bを通してOAに平行な直線とy軸との交点を求めればよい。

面積が等しくなるようにという問題だったので、最初は面積の求め方をいろいろと工夫したのだが、この章（「1次関数」）で学んだ最新のツールを使うと、何と、面積を求めなくても解決ができるのである。

その生徒のノートを図はとてもきれいに描かれていた。自分のかいた図をとおして授業で学んだことを深めることに成功したのだと思った。

5. おわりに

高校における解析幾何は、高校2年生が学ぶ数学Ⅱの「図形と方程式」で中心的に取り扱われる。そのねらいは、「図形に座標を入れて、関数を用いて図形の性質を探究する」ことにある。近い将来、そういった課題に取り組むことになるための準備として、中学校の数学においても、座標平面上において点や線分を用いて図形をつくったり、関数の力を借りて、その図形の性質を探究する学習をさせることは、中高の接続の視点からも大切にしてよいのではないだろうか。そんなことを考えさせられた授業のひとつであった。



〒135-0063 東京都江東区有明3-4-10 TFTビル西館

URL <https://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

TEL 03-5579-6278(代表)

令和4年(2022年)11月 発行

本資料は、令和3年(2021年)5月まで発行していた「中学数学通信 coMpass」を再編集してまとめたものです。発行当時の情報が一部記載されていることをご了承ください。

本資料は、文部科学省による「教科書採択の公正確保について」に基づき、一般財団法人教科書協会が定めた「教科書発行者行動規範」ののっとり、配布を許可されているものです。