

1 年 1 章「整数の見方」の指導について

1. 学習指導要領の変遷と「整数の見方」の扱い

これまでの学習指導要領の変遷をまとめると、右のようになります。右の A～D の時代までの中学校第 1 学年の教科書は、「整数の見方」の学習からスタートしていました。E の時代からは、「整数の見方」の学習は小学校に移行しましたが、素数や素因数分解については中学校第 3 学年で学習することとなりました。また、G の時代には、素数のみ小学校に移行しました。

A	昭和 22 年	生活単元学習時代
B	昭和 33 年	系統学習時代
C	昭和 44 年	数学教育現代化時代
D	昭和 52 年	基礎・基本の時代
E	平成 元年	個性化・多様化の時代
F	平成 10 年	厳選とゆとりの時代
G	平成 20 年	生きる力の時代
H	平成 29 年	資質・能力の 3 つの柱の時代

このような変遷を経て、現行の学習指導要領（H の時代）では、「自然数を素数の積として表すこと」は中学校第 1 学年で取り扱うこととなっています。これについて、『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』では、次のように述べられています。

自然数を素数の積として表すこと（〔内容の取扱い〕(1)）

内容の取扱い(1)に示されているように、自然数を素数の積として表すことを内容の「A 数と式」の(1)などに関連して取り扱う。これは、自然数を素数の積として表すことによって、小学校算数科で学んできた整数の性質についての理解を深め、中学校での学習につなげることができるからである。

小学校算数科では、整数の性質について、偶数、奇数、約数、倍数、最大公約数、最小公倍数という観点から学習しているが、素数については学習していない。

ここでは、1 より大きい自然数が、1 とその数自身以外には約数をもたない数とそうではない数とに分けられること、すなわち、素数と素数ではない数との 2 種類に分けられることを理解できるようにする。

素数ではない数は、その約数を用いて幾つかの自然数の積で表すことができる。また、それらの自然数の中に素数でないものがあれば、さらに、その約数を用いて積に表すという操作を続けていくと、最終的には素数だけの積で表すことができる。これが素因数分解であり、その表し方はただ一通りに決まる。分解の順序をいろいろに変えても、整理すると結果は同じ素数の積になることを活動を通して具体的に知ることができるようにする。このように自然数を素数の積で表すことにより、算数で学習した約数、倍数などの整数の性質について捉え直すことができるようにする。

このように、自然数の素因数分解には、単に自然数を素数の積で表すだけでなく、それによって算数で学習した約数や倍数などの整数の性質について捉え直すことができるようにするという目的があります。また、自然数を素数の積で表すという新たな見方は、以降の学習においても問題の状況や場面に応じて活用できる汎用的な知識・技能となり、これは深い学びへとつながっていくものと考えられます。

つまり、自然数の素因数分解は、中学校の数学を始めるにあたって、小学校での学びを振り返りながら数学科の目標を実現させていくのに適した学習テーマとして位置づけることができます。

そこで、当社の教科書では、1 年 1 章に「整数の見方」という章を設け、自然数の素因数分解を中学校数学の授業開きとして扱うことができるようにしました。

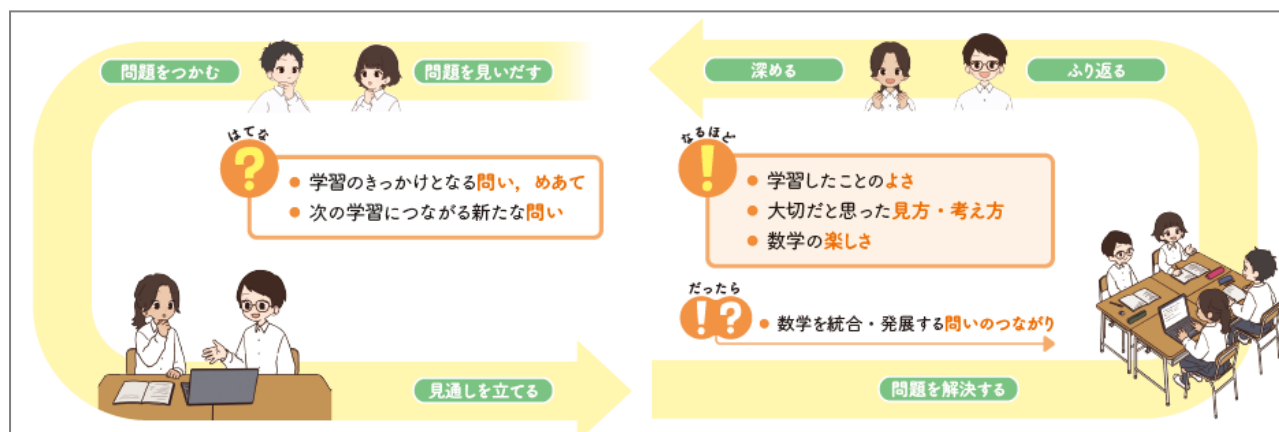
2. 1年1章で「整数の見方」を指導するよさ

① 小中の接続をなめらかにすることができる

「整数の見方」を教科書の最初の章に位置づけることによって、内容と学び方の2つの面から小中の接続をなめらかにすることができます。

内容の面では、これまでのものの個数を数えるときに使ってきた自然数を最初に取り扱うことで、小学校までの正の整数を起点として、中学校での数学の学習を緩やかにスタートさせることができます。新しい内容が増えていくイメージをもたせるよりも、既習の学習内容に対して、視点を増やすと新たな捉え方もできるという体験をさせるほうが、生徒にとって算数・数学の内容の接続がなめらかになるでしょう。

学び方の面では、「問い」をもとにした問題発見・解決のサイクルは算数だけではなく数学でも同様に成し得ることを体得することができます。「整数の見方」の学習では、「30までの素数を学んだとき、このあとの素数はどうなるのか?」、「素因数分解をしているとき、表し方はどれくらいあるのか?」など、生徒のなかに素朴な「問い」が生じやすいためです。また、「整数の見方」で扱う学習内容は、算数が苦手であった生徒や計算に不安をもつ生徒にとっても、着手しやすく気づきが促されるものです。このことによって、これからの数学の学習に期待をもつとともに、生徒自身の安心感を醸成することもできます。さらに、比較的短い章のため、1つの章を通しての教科書の使い方、学び方、学習習慣のつけ方を定着させていくのにも適しています。



▲1年 p.4-5

指導する教師にとっても、小学校のときに培われた算数の力がどの程度なのかを把握することができます。「整数の見方」の学習では、小学校での整数の見方（偶数・奇数の類別、約数・倍数、公約数・公倍数の見方など、具体的な場面に即した整数の性質の理解）や、それらを使って計算する能力などを見取ることが可能です。さらに、算数の力には、数学的な見方・考え方など、単にペーパーテストでは見取ることのできないものも含まれており、それらは授業を通して捉えていくものでもあります。観点を決めて分類整理する、能率よく処理する、既習内容をもとに考える、根拠に基づいて説明するなど、生徒がどのようにして数学的な見方・考え方を働かせているのかを観察することもできるでしょう。数や式に関する理解度を把握しておくことは、「正の数、負の数」の学習をはじめ、中学校での学習を展開していくうえで大切です。

また、1年1章「整数の見方」は3時間構成でつくられており、教師が単元構成を検討しやすくなっています。例えば、指導に生かす評価と記録に生かす評価をどう配列するか、個別最適な学びをどこに位置づけるか、振り返りの在り方をどう工夫するかなど、指導計画の立案に試行的に取り組むことも可能です。

② これからの数学の学習に必要な知識や考え方を定着させることができる

「整数の見方」の学習を通して、これからの数学の学習で必要となる知識の確かな理解を図ることができます。「整数の見方」では、以下のように、数に関するいくつかの用語を取り扱っています。

自然数 倍数 約数 素数 素因数 素因数分解 累乗 指数

これらの用語は、いずれも数の学習においては大切なものであり、きちんと理解しておく必要があります。「正の数、負の数」の学習においても使われるものであり、「正の数、負の数」の学習の前にそれぞれの意味の確かな理解を図ることが可能となります。

とくに、累乗については、負の数に拡張する前に扱うことで、スモールステップで理解を深めることができるようにしています。累乗の学習を通して、全国学力・学習状況調査等で課題があると指摘されている「数学的な表現を用いた理由の説明」を経験することもできます。例えば、 $2^3=6$ や $3^2=6$ といった誤答が起こりえますが、これが誤答である理由の説明を数の拡張前の段階で扱うことができ、早い段階から説明力の向上の機会が得られます。

累乗

5×5 や $5 \times 5 \times 5$ のように、同じ数をいくつかかけるとき、 5^2 , 5^3 と表す。

5^2 を 5 の 2 乗, 5^3 を 5 の 3 乗 と読む。2 乗, 3 乗などをまとめて **累乗** という。

また、右上に小さく書いた数は、かけた個数を示し、これを **累乗の指数** という。

累乗の指数を使うと、例 1 の式は、
次のように表すことができる。

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$

累乗の指数を使うと、素因数分解の結果を簡潔に表せるね。

数学メモ

2 乗のことを平方、3 乗のことを立方ということもあります。

▲1年 p.18

さらに、数の拡張後には、例えば、 -3^2 と $(-3)^2$ の違いなどで混乱を生じる可能性があります。累乗の指導を数の拡張前に行っておけば、この段階ではその学び直しとして、既習内容をもとにした説明力の向上の機会にもつながります。知識の関連づけに学びの特質がある数学科においては、このように、既習内容を根拠にして、新たに学んだ知識について説明できるようにすることが大切です。知識・技能を身につけさせる段階で、既習内容と新しい学習内容を生徒自身で関連づける学習を継続することにより、既習の数学を活用して数学的な見方・考え方を働かせる状態に導くことができるようになりますと考えられます。このことは、思考力・判断力・表現力や主体的に学習に取り組む態度の育成にも貢献するでしょう。また、累乗を負の数に拡張する前に扱うことで、累乗という算数では学ばなかった簡潔な表現を、素因数分解の学習によって役立てることも可能となります。

知識だけでなく、これからの数学の学習で大切にしたい考え方を意識させることもできます。素因数分解を学習すると、例えば、64 という数を見たときに、 8^2 や 2^6 というような乗法的な見方ができるようになるなど、数の捉え方が変わります。このように、1 つの数からさまざまな見方や表現ができることは、中学校の数学を学ぶうえで大切な視点となります。

また、素因数分解の学習では、自然と数を式で表現する機会が増えます。例えば、1 年 p.17 問 5 で 30 を素因数分解する際には、 $30=2 \times 15=2 \times 3 \times 5$ 、 $30=3 \times 10=3 \times 2 \times 5$ と 2 つの見方で「式に表す」活動を通して、その表現が一意に定まることを理解します。

問5 さらさんとりくさんは、次のように 30 を素因数分解しました。

さらさん

$30 = 2 \times 15$
 $= 2 \times 3 \times 5$

りくさん

$30 = 3 \times 10$
 $= 3 \times 2 \times 5$

▲1年 p.17

1年 p.20 では、素因数分解を利用して 60 の約数を求める活動に際して、数を「式で捉える」「式で調べる」「式で考える」という学習を経験します。

「式に表す」「式で捉える」「式で調べる」「式で考える」ことは、いずれも、「正の数、負の数」の学習のなかでも常に必要となります。さらに、文字式や1次方程式でも、式での表現、操作、考察など、常に式で考えることが求められます。生徒は、式に表したり、式で考えたりすることがなかなかできませんが、このように数学では、算数での学習と比べ、はるかに式を利用する機会が増えます。素因数分解の学習を通して、式に表し、式で考えることの素地をつくるとよいでしょう。

さらに、1年 p.281 の「数学の広場」で取り上げられている最大公約数と最小公倍数について扱うことも有効です。算数では小さな整数で手続き的にわり進めたり、倍数に着目して羅列したりすることで、最大公約数や最小公倍数を求める経験をしてきました。素因数分解を利用してこれらを求める方法を学習することは、素因数分解の概念的理解を深めるだけでなく、整数の性質についての着想をひろげる機会にもなると考えられます。

素因数分解を利用すると、ある自然数にどんな約数があるか調べることができる。

たとえば、60 を素因数分解すると、

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \dots\dots ①$$

となる。素因数 2, 2, 3, 5 の積の組み合わせを考えると、

①の式は次のように変形することができる。

$$60 = 2 \times (2 \times 3 \times 5) = 2 \times 30$$

$$60 = 3 \times (2 \times 2 \times 5) = 3 \times 20$$

$$60 = 5 \times (2 \times 2 \times 3) = 5 \times 12$$

$$60 = (2 \times 2) \times (3 \times 5) = 4 \times 15$$

$$60 = (2 \times 3) \times (2 \times 5) = 6 \times 10$$

また、1 と 60 は 60 の約数であるから、これらを合わせて、60 の約数は、

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

であることがわかる。

2つの自然数の積になるように変形しているんだね。



▲1年 p.20

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60 \ 72} \\ 2 \overline{) 30 \ 36} \\ 3 \overline{) 15 \ 18} \\ \quad 5 \ 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2 \times 2 \times 3 = 12$$

▲1年 p.281

③ 数学の魅力や有用性を実感させることができる

素数や素因数分解は、古くはギリシャの時代から、数学という学問のなかでも常に数学者の心を捉え続けてきたものの1つです。素数は、1とその数自身でしかわることができないというシンプルな考え方に基づくものです。しかし、一方ではその出現が予測できないという特徴を持ち合わせ、素数が正確に導き出せる数式を未だ人類で発見した者はいません。したがって、素数かどうかを判定することは、数が大きくなればなるほど簡単なことではなくなり、このことがネット上の暗号技術を支えているなど、私たちの社会でとても役に立っています。

素数や素因数分解は、自然界とも密接なつながりがあります。1年 p.12 の「章とびら」と p.22 の「数学の広場」で取り上げられている素数ゼミの話題は、その一例です。中学校の数学は少しずつ現実と離れていくように見えますが、実際は現実の世界ととても深い関わりがあるということを、この例を通して実感させることができます。

数学の夢と魅力と実用を兼ね備えたこの素数の学習は、数学の学習の入口となる章で取り上げるのにふさわしいものといえます。

情報化社会を支える暗号



インターネットなどの情報通信では、大切な情報が他人に盗まれないように、送信する情報を暗号化しています。その際によく使われているのが、「RSA 暗号」というシステムです。

RSA 暗号では、事前に受け手は送り手に2つの素数の積を「暗号の鍵」として教え、それを使って暗号をつくれます。しかし、暗号を解読するには、事前に教えた「暗号の鍵」ではなく、もとの2つの素数を知ることが必要なくみになっています。もとの2つの素数を大きな素数にすると、それらを見つけるためには、コンピュータを利用しても膨大な時間がかかります。

大きな数を素因数分解することの難しさを利用して、暗号の安全性を保障しているのです。

▲1年 p.341