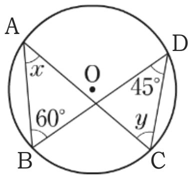
章の問題

1 (1)　右の図で，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角は等しいから，

$\angle x=\angle BDC$
$=45°$

また，$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角は等しいから，

$\angle y=\angle ABD$
$=60°$



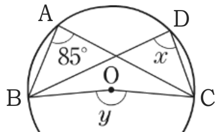
答　$\angle x=45°$，$\angle y=60°$

(2)　右の図で，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角は等しいから，

$\angle x=\angle BAC$
$=85°$

また，$\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角の 2 倍だから，

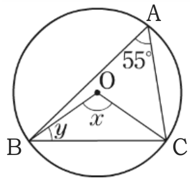
$\angle y=2\angle x$
$=2\times 85°$
$=170°$



答　$\angle x=85°$，$\angle y=170°$

(3)　右の図で，$\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角の 2 倍だから，

$\angle x=2\angle BAC$
$=2\times 55°$
$=110°$



OB＝OC より，△OBC は二等辺三角形だから，

$\angle y=\angle OCB$

したがって，三角形の内角の和は 180° だから，

$\angle x+\angle y+\angle OCB=180°$
$110°+\angle y+\angle y=180°$
$2\angle y=70°$
$\angle y=35°$

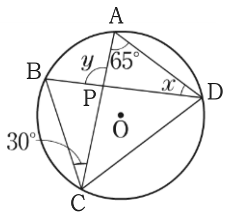
答　$\angle x=110°$，$\angle y=35°$

(4)　右の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから，

$\angle x=\angle ACB$
$=30°$

△APD で，三角形の内角と外角の関係から，

$\angle y=\angle PAD+\angle x$
$=65°+30°$
$=95°$



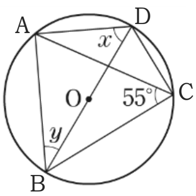
答　$\angle x=30°$，$\angle y=95°$

(5)　右の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから，

$\angle x=\angle ACB$
$=55°$

線分 BD は円 O の直径だから，

$\angle BAD=90°$



△ABD で，三角形の内角の和は 180° だから，

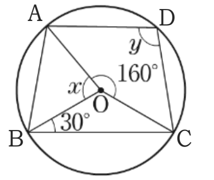
$\angle y=180°-(\angle BAD+\angle x)$
$=180°-(90°+55°)$
$=35°$

答　$\angle x=55°$，$\angle y=35°$

(6)　右の図で，OB＝OC より，△OBC は二等辺三角形だから，

$\angle OCB=\angle OBC$
$=30°$

よって，三角形の内角の和は 180° だから，



$\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)$
$=180°-(30°+30°)$
$=120°$

したがって，

$\angle x=360°-(\angle BOC+\angle AOC)$
$=360°-(120°+160°)$
$=80°$

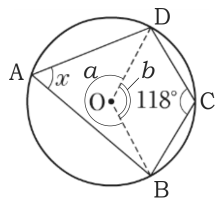
また，$\overset{\frown}{ABC}$ に対する円周角は，$\overset{\frown}{ABC}$ に対する中心角の $\frac{1}{2}$ だから，

$\angle y=\frac{1}{2}(\angle x+\angle BOC)$
$=\frac{1}{2}(80°+120°)$
$=100°$

答　$\angle x=80°$，$\angle y=100°$

2 (1)　右の図で，$\overset{\frown}{DAB}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{DAB}$ に対する円周角の 2 倍だから，

$\angle a=2\angle DCB$
$=2\times 118°$
$=236°$



したがって，

$\angle b=360°-\angle a$
$=360°-236°$
$=124°$

また，$\overset{\frown}{DCB}$ に対する円周角は，$\overset{\frown}{DCB}$ に対する中心角の $\frac{1}{2}$ だから，

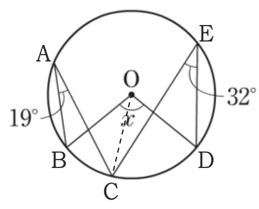
$\angle x=\frac{1}{2}\angle b$
$=\frac{1}{2}\times 124°$
$=62°$

答　$\angle x=62°$

(2)　右の図で，$\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角の 2 倍だから，

$\angle BOC=2\angle BAC$
$=2\times 19°$
$=38°$

また，$\overset{\frown}{CD}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角の 2 倍



だから，

∠COD＝2∠CED

＝2×32°

＝64°

したがって，

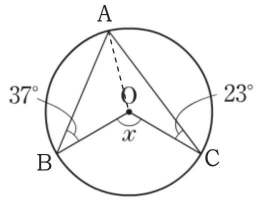
∠x＝∠BOC＋∠COD

＝38°＋64°

＝102°

答　∠x＝102°

(3)　右の図で，OA＝OB より，△OAB は二等辺三角形だから，



∠OAB＝∠OBA

＝37°

また，OA＝OC より，△OAC は二等辺三角形だから，

∠OAC＝∠OCA

＝23°

したがって，

∠BAC＝∠OAB＋∠OAC

＝37°＋23°

＝60°

$\overset{\frown}{BC}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角の 2 倍だから，

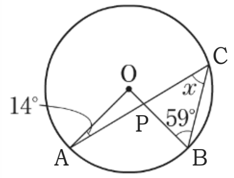
∠x＝2∠BAC

＝2×60°

＝120°

答　∠x＝120°

(4)　右の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角の 2 倍だから，



∠AOB＝2∠x

△OAP と△CBP で，三角形の内角と外角の関係から，

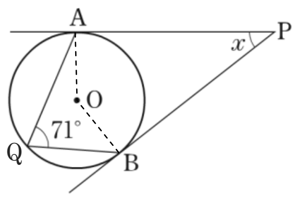
∠AOP＋∠OAP＝∠x＋∠CBP

2∠x＋14°＝∠x＋59°

∠x＝45°

答　∠x＝45°

(5)



上の図で，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角は，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角の 2 倍だから，

∠AOB＝2∠AQB

＝2×71°

＝142°

PA，PB はそれぞれ点 A，B を接点とする円 O の接線だから，

∠OAP＝∠OBP＝90°

したがって，四角形の内角の和は 360° だから，

∠x＝360°－(∠AOB＋∠OAP＋∠OBP)

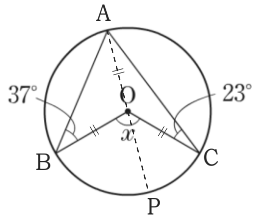
＝360°－(142°＋90°＋90°)

＝38°

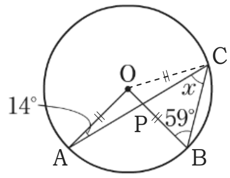
答　∠x＝38°

解説

(3)　次の図のような補助線をひいて，△ABO，△ACO が二等辺三角形であることを利用し，∠BOP，∠COP を三角形の内角と外角の関係から求めて，それらの和として∠x を求める方法もある。



(4)　次の図のような補助線をひいて，△OAC，△OBC が二等辺三角形であることを利用して，∠x を求める方法もある。



3　弧の長さは，その弧に対する円周角の大きさに比例するから，

$\overset{\frown}{AB}$: $\overset{\frown}{BC}$ ＝ ∠AEB : ∠BDC

3 : 5 ＝ ∠AEB : 35°

5∠AEB ＝ 3×35°

∠AEB ＝ 21°

答　21°

4 (1)　△ABQ と△APC で，

仮定から，

∠BAQ＝∠PAC　…… ①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから，

∠AQB＝∠ACP　…… ②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいから，

△ABQ∽△APC

(2)　二等辺三角形

［証明］

$\overset{\frown}{BQ}$ に対する円周角は等しいから，

∠BCQ＝∠BAQ　…… ①

$\overset{\frown}{QC}$ に対する円周角は等しいから，

∠QBC＝∠QAC　…… ②

仮定から，

∠BAQ＝∠QAC　…… ③

①，②，③から，

∠BCQ＝∠QBC

したがって，２つの角が等しいから，△BQC は二等辺三角形である。

5　円周角の定理より，∠A＝∠D，∠B＝∠C だから，

△ABE∽△DCE

したがって，

AB : DC ＝ AE : DE

12 : 18 ＝ 10 : DE

12 DE ＝ 18×10

DE ＝ 15

答　15 cm

6 (1)　∠ADP は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であり，∠DAP は $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角である。

△APD で，三角形の内角と外角の関係から，

$$\angle APB = \angle ADP + \angle DAP$$

したがって，∠APB は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角と $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角の和に等しい。

(2)　∠ACB は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角であり，∠QAC は $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角である。

△ACQ で，三角形の内角と外角の関係から，

$$\angle AQB + \angle QAC = \angle ACB$$

すなわち，

$$\angle AQB = \angle ACB - \angle QAC$$

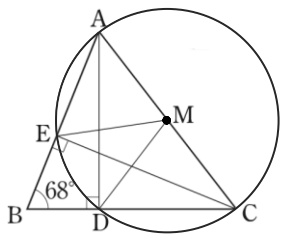
したがって，∠AQB は $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角と $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角の差に等しい。

解説

(1)　∠APB を△PBC の外角とみて証明する方法もある。

(2)　∠ADB を△DBQ の外角とみて証明する方法もある。

7　２点 E，D は直線 AC について同じ側にあり，∠AEC＝∠ADC＝90° だから，４点 A，E，D，C は線分 AC を直径とする円の周上にある。また，点 M は線分 AC の中点だから，この円の中心は点 M である。



一方，△ABD で，三角形の内角の和は 180° だから，

$$\begin{aligned}\angle BAD &= 180° - (\angle ABD + \angle ADB)\\ &= 180° - (68° + 90°)\\ &= 22°\end{aligned}$$

したがって，∠BAD は $\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角，∠EMD は $\overset{\frown}{ED}$ に対する中心角だから，円周角の定理より，

$$\begin{aligned}\angle EMD &= \angle BAD \times 2\\ &= 22° \times 2\\ &= 44°\end{aligned}$$

答　44°