

coMpass

コンパス

● 伝え合う活動が
生まれる
楽しい課題学習

coMpass は教育出版が
発行する情報誌です



教育出版

[目次]

巻頭言 課題学習で体験して欲しいこと 木村 寛 3

特集 “伝え合う活動が生まれる楽しい課題学習”

- 実践事例① 九九表から見いだしたことを説明する授業 . . . 傍士 輝彦 4
- 実践事例② 桜の開花日を予測しよう 塩崎 陽子 7
- 実践事例③ 枡から数学を学ぶ 上田 雅也 10
- 実践事例④ 正多面体 大塚 みずほ 13

連載

○ 数学的活動へのイノベーション 吉野 茂 16

教育現場とリンク

教育出版

エデュコネット

入会金・会費は無料です!



EducoNet の会員を募集しています!

会員の皆様に、インターネットを通じて
教育情報をご提供します。

EducoNet
とは...

教育関係者専用 のWEBサイトです。

役立つ資料・情報の宝庫 です。

- 教育情報 教育界の動向等の情報提供
- 教科のページ 年間指導計画・評価基準・高校シラバス・教科別お役立ちコーナー・編集部からのお知らせなど
- メールマガジン . . . 教育関連情報をタイムリーに発信

会員は...

- ◆ 会員専用のコンテンツにアクセスできます。
- ◆ メールマガジンが定期的に配信されます。

申し込みを受け付け後、ID・パスワードを勤務先に郵送します。

教育出版EducoNet会員登録について

★WEBにて受け付けています!!
教育出版ホームページまたは
<http://educonet.jp/entry.html> に
アクセスしてください。

※ 個人会員のほかに、教育委員会・学校単位での申し込みも受け付けます。

教育出版ホームページの主な内容
<http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

EducoNet (会員制)

- ・ 年間指導計画
- ・ 評価基準
- ・ 教科別お役立ちコーナー
- ・ 教科通信
- ・ ニュースレター
- ・ 各種教育情報
- ・ 編集部から
- ・ メールマガジン

■ 情報提供

... 教育情報 総合的な学習 研究会日程

■ 各種リンク集

■ ご案内

... 教科書内容 教師用指導書 教材品

■ 教科書関連資料・写真館

■ 新刊書紹介

■ もの知りテーマパーク

■ 地球時代の教育情報誌Educo

課題学習で 体験して欲しいこと

木村 寛

〔宮城学院女子大学教授／宇都宮大学名誉教授〕

1 過去 20 年の実践を踏まえて

課題学習は、生徒にとってこの上なく楽しい学習活動であるはずである。もちろん教師にとっても楽しく充実した授業であるはずである。なぜならば、課題学習の授業で生徒は、はじめの問題などは教師から紹介されたものであっても、その追究の方法やそれに引き続く学習活動で追究する内容や方法の選択に、自ら決める自由性を持つからである。教師にとっても、そのような生徒の学習活動への関わりの中で、ときには生徒と教師の区別なく互いの興味・関心に従って、生徒と共学する場面を共有できるからである。

振り返れば、課題学習が中学校の数学に法的に設定されたのは、平成元年改訂の学習指導要領で、算数・数学の「よさ」を感得させたいために、第2学年及び第3学年と選択数学に設定されたのが始まりである。それが平成10年改訂で、総合的な学習の時間の創設とともに、数学科では「数学的活動の楽しさ」を味わわせる場面の一つとして、課題学習が全学年に設定された。そして、今回、平成20年改訂では数学的活動をさらに充実させ、伝え合うための数学的な手法を用いた言語力や、種々の場面で数学を活用する力を伸ばすことが提唱された。そのための重要な指導手段として、課題学習を引き続き重視することとなったの

であろう。このような過去20年の経緯を踏まえて、教育活動の連続性を望むならば、今回の課題学習の役割は、平成元年、10年、そして20年改訂でうたわれた趣旨を総合したものと考えたい。

そして、個人的には課題学習に対して、次の2つを心掛けた授業の実践に挑戦することを期待したい。

2 課題学習で体験して欲しいこと

その一つは、どの生徒にも数学の授業は「楽しい」と感じて欲しい。たとえその時間に分からないできないことが多くあったとしても、楽しいと感じる時間にして欲しい。

もう一つは、身に付けた数学を、人や社会を騙すこと、欺くこと、危険にさらすことなどに使ってはならないことに気付いて自覚する場にして欲しい。数学は公理に矛盾がないことと、それに基づく推論の過程に矛盾がないことを守って、自由に作られた論理学であり形式的科学であるといわれている。他方、数学は他の科学を作ったり、種々の問題を科学的能率的に解決するための道具であるという側面がある。しかし、道具は使い方によっては人や社会を脅かす存在である。数学においても、それを使う人の良心が重要であることを、課題学習の場でも考えてもらえないだろうか。

実践事例①

九九表から見いだしたことを説明する授業

傍士 輝彦

〔東京学芸大学附属世田谷中学校教諭〕

1 はじめに ～伝え合う活動

数学的活動は、平成 24 年度から完全実施される学習指導要領で今まで以上に強調されたが、実はこのこと自体、特に新しいことではない。「伝え合う」活動も同様である。『伝え合う活動のある授業』であるためには、『子どもの発言を生かす授業』でなければならないだろう。

教師は構えて授業に臨む必要はない。多くの教員が、日頃から留意しているはずのことだからである。授業場面が課題学習であれば、なおのことであろう。本稿では、よく知られた九九表を題材にした事例について述べる。

2 九九表について考える課題学習

4 月、中 1 の生徒は、多様な学級から多様な算数を学習してやって来る。そこで、筆者は、算数・数学間の緩衝時期を設け、多様な算数知識のある程度の平滑化、中学校の数学の授業に対する理解、の 2 つを主目的として、第 1 章「正の数、負の数」に入る前の時期に、この題材を取り上げることがある。あるいは中 1 の文字式が終わった段階で、もしくは中 3 の多項式が終わった段階で、文字式の学習の総まとめの意味を込めて文字を活用する課題学習として実施することがある。中 1 と中 3 との大きな

違いは、文字を使って理由を説明できるか否か、という点であろう。

九九表とは、よく知られたように九九の結果を表にしたものである。授業では表を生徒に見せ、

①どんなことに気がつくか

②なぜか（＝理由）

について問うものである。

＜九九表＞

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

I 課題の提示（5 分）

B4 判のワークシートを配布し、生徒はワークシートに気づいたことを書き留め、その理由も考える。終始一貫して個人作業としてもよい。班を作った上で個人で考えさせ、班の中で相談し教えたり教えてもらったりし、班の中で自分の考えを説明する、班の中で最もおすすめの考え方を全体の中で発表してもらう、等の形態でもよい。教

室の実態に応じて、設定する。

説明の際、縦軸を「かけられる数」、横軸を「かける数」などして統一しておくといよい。

II 考え、発見し、また考える (20 分)

理由の書き方や考え方については先に教師が例示することもあり得るが、生徒の思考を限定するので、できることなら生徒の自由な発想に任せたい。生徒の実態に応じて、教師は机間を廻り、指導・助言する。

生徒の説明は、実施学年や生徒の数学の力によって、次のような状況が認められる。

- a) 説明できない
- b) 言葉で説明する
- c) n や a などの文字を用いて、一般的に成り立っていることを証明しようとする

例えば、生徒が考え始めて初期の段階でまず最初に書き出す内容は、およそ

- ア) 横に見ると、 n の段は n ずつ増加する (減少する)

であり、次に見いだされる事柄の多くは、

- イ) 縦に見ると、 n の段は n ずつ増加する (減少する)

である。「横」がヒントとなって、縦に見ることを思いつく。普通、この内容のレベルでは生徒は n を使う必然性を感じないので、 n は使わずに『横に見ると、2 の段なら 2 ずつ増え、5 の段なら 5 ずつ減っている』などと表現する。そして、この事実はほとんどの生徒が発見するが、生徒にとって理由は書き難い。そこで生徒には、「かける数が 1 ずつ増えているから、例えば 2 の段なら 2 ずつ増える」などと例示してみるとよい。

次のウ)やエ)も、ア)やイ)の延長上にある。

- ウ) ある数とその下の数との和は、右方

向に段の数の和ずつ増える

- エ) ある数とその右の数との和は、下方向にかける数の和ずつ増える

ところが、次のオ)のような発見の場合、理由の説明は、中 1 の段階では手段を問わず難しいであろう。

- オ) 例えば 4 の段の一の位の数が、4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0…と繰り返している

生徒は 2 の段や 6 の段、8 の段などでも、同様の発見をする。このような場合、無理に説明させようとする必要はないが、10 倍すると一の位の数になるのので少なくともその次の数から再び繰り返すこと、あるいは、九九表の縦軸と横軸を 10 以上の整数により拡張させた表を作らせ広い範囲で一の位の数の繰り返しの特徴を掴ませる、などとする。

一方、

- カ) 値が、対角線 AC について、線対称に並んでいる

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	C
B										

といった発見については、なんとか理由を考えるようにする。書式について厳密になる必要はなく、自由書式でよい。生徒は、その力に応じて、『 2×3 と 3×2 は同じだから』、『かける数とかけられる数を入れ替えても結果は同じだから』、『乗法は交換法則

が成り立つから』などと説明する。カ)に似てはいるが、キ)の説明は難しい。

キ) 一の位の数が、対角線 BD について、線対称に並んでいる

他に、いくつかの生徒の考えの例を挙げておく。

ク) ある数とその斜め右 (左) 下 (上) の数との差は、ある数が右に行くにしたがって 1 ずつ増える (減る)

ケ) ある数とその右隣の 2 つ下 (上) の数との差は、ある数が右に行くにしたがって 2 ずつ増える

コ) ある数とその左隣の 2 つ下 (上) の数との差は、ある数が右に行くにしたがって 2 ずつ増える

サ) ある値 a と a の右下の値との和は、 a の右の値と a の下の値との和に 1 を加えた数に等しい

シ) ある数とその数の斜め右下の数の、2 数の積は、ある数の右の数とある数の下の数の積に等しい

ここで、キ)～サ)のような発見については、生徒が中 3 であれば、「ある数」という語が、一般的に成り立つことを文字を用いて説明しようとするきっかけとなろう。その説明は、例えば、文字を適当に定義して下ののような表を新たに作り、実際に差を計算することによって説明できる。

	...	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	...
...	...	...	...	...	...	...
b	...	ab	$ab+b$	$ab+2b$	$ab+3b$	...
$b+1$	...	$ab+a$	$ab+a+b+1$	$ab+a+2b+2$	$ab+a+3b+3$	...
...	...	...	...	...	...	...

このシ)の考え方に気がつく、授業はおもしろくなる。そして、シ)の考え方を拡張し、ス)のような発見もある。

ス) 九九表の中の任意の場所の任意の n に対して、 $n \times n$ 方形に着目したとき、

4 つの角にある 4 数について、シ)と同様のことがいえる。

シ)は、ス)において $n = 1$ の場合である。

教師は、発見の内容の難度や生徒の実態に応じて、説明の方法も含めて、生徒には適切に助言したい。

III 発表 (伝え合う) (20 分)

生徒が自分の考えを発表し、聞く側の生徒が理解したり、あるいは質問したりすることが、まさに伝え合う活動である。口頭で発表するのみでも構わない。例えば中 1 の段階であれば、それでよいだろうが、可能な限り、前に出て板書などを活用しながら説明するようにしたい。

生徒の前で行われる生徒の発表のスタイルは、発表する生徒の実態に応じて、およそ、

- a) 口頭で発表する
- b) 図を使い図示しながら口頭で発表する
- c) 図と式を使って口頭で発表する

の 3 通りに大別できる。中 3 段階であれば c) のスタイルを取る生徒が多いが、中 1 の生徒では、論証に関する数学的準備に乏しいので a) ないし b) が多い。

理由の説明は、別の生徒によってなされてもよい。また、1 つの説明に対して、より効率的な説明や別の説明があれば、指名や挙手によって新たな説明がなされるのも、他の授業と同様である。複数の生徒の協力による説明も、伝え合う活動である。

3 まとめ

中 1 でも中 3 でも、たかが九九表…ではなく、九九表をじっくり見つめてみれば、実は多様な性質が多く隠されている、ということから、生徒が不思議さや面白さを感じ取ってくれば授業は成功である。

実践事例②

桜の開花日を予測しよう

塩崎 陽子

【埼玉大学附属中学校教諭】

1 通常の授業での取り組み

課題学習を実践するにあたって、通常の授業における問題解決的な学習を定着、充実させていくことが大切である。

第2学年で行った、本事例「桜の開花日を予測しよう」の課題学習にかかわる通常授業での取り組みについて紹介する。

(1) 第1学年「資料の散らばりと代表値」

第1学年の資料の活用の授業の中で、次のような課題についての学習を行った。

【課題1】さいたま市の桜（ソメイヨシノ）が開花した日は、2009年は3月25日、2010年は3月31日でした。なぜ、年によって桜が開花する日が違うのでしょうか。考えられる理由を挙げてみよう。

【課題2】2009年3月と2010年3月の日ごとの気温等がわかる表があります。自分の考えた方法で表の資料を整理し、2009年3月の方が、2010年3月よりも暖かったといえるかどうか調べてみよう。また、その理由を自分なりに説明してみよう。

【課題1】では、「桜の咲く頃の気温が異なること」、「冬の気候が異なること」、「雨や雪などの影響」、「地球温暖化の影響」な

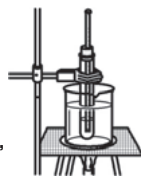
ど様々な意見が出された。このようになぜといった疑問から、考えられる理由を予想し、実際の情報を基に調べてみるのが大切であることを確認した。この中から、3月の気温に着目し、【課題2】において「最高気温が15℃以上の日を比較する」「平均値や最大値、範囲などを比較する」「度数分布表やヒストグラムに表して比較する」など様々な方法で、2009年3月の方が2010年3月よりも暖かったといえる理由を説明していく。

このように、通常の授業においても、自分の考えを自分なりに説明し伝え合う活動に取り組むことが大切である。

(2) 第2学年「一次関数」

第2学年の一次関数の授業の中で、次のような課題についての学習を行った。

【課題】右のような装置で水を熱し、熱し始めてから x 分後の水温を y ℃として x と y の関係を調べたところ、次の表のようになりました。



x	0	1	2	3	4	5	6
y	16	21	28	34	41	46	52

① 熱し始めてから10分後の水温は何℃と考えられますか。

② 水が沸騰するのは、熱し始めてから何分後と考えられますか。

(グラフ用紙は略)

二つの数量の関係を一次関数とみなすことで事柄を予測する活動である。『中学校学習指導要領 解説 数学編』に数学的活動の例として挙げられている内容でもあり、平成19年度全国学力・学習状況調査においても同様の題材が取り上げられている。

実験や観察の結果を理想化したり単純化したりすることで一次関数とみなし、表、式、グラフを用いて処理し予測できることのよさを知り、事象の考察に生かせるような機会を設けた。

2 課題のねらい

本事例は、第1学年の資料の活用の学習で「2009年3月の方が2010年3月よりも暖かったから桜の開花日が2009年の方が2010年よりも早かった」と考えたことについて、本当にそのように判断してよいのかという疑問から問題解決の方法について評価・改善していく授業である。第1学年の学習では3月の気温が高いと桜の開花日が早くなるという相関関係があることを想定しているが、そのようにいえる理由を、熊谷市の1981年から2010年までの3月平均気温と桜の開花日の30年間の資料を基に具体的に調べ、その特徴から考えさせる。

桜が開花するのは3月の気温以外にも様々な要因が考えられ、二つの数量を座標とする点は一直線上に並ばず、一次関数とはいえない。しかし、相関関係があることから傾向を読み取ることができること、また、2011年の桜の開花日を回帰直線を引くことで予測できることから、関数の考えを活用することのよさを味わわせたい。このような活動を通して、日常生活や社会から

関数と見なせる事象を見いだして考察する際に生かせるようにする。

3 授業の展開

(1) 導入問題を考える

【導入問題】2009年3月の方が2010年3月より暖かったから、桜の開花日について2009年の方が2010年より早かったと考えましたが、本当にそれでいいのでしょうか。

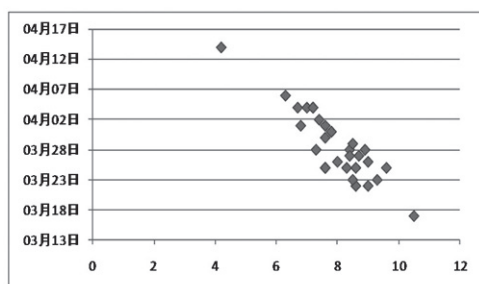
- ・ 代表値や、ヒストグラムなどを用いて調べた結果だからいいのではないかな。
- ・ 気温だけが要因ではないのではないかな。
- ・ いろいろ調べたとしても、2年間しか調べなかったら、偶然にそうなかっただけかもしれない。
- ・ 本当に3月の気温と開花日に関係があるか、何年間かで調べないといけないのではないかな。

(2) 【課題1】に取り組む

【課題1】埼玉県熊谷市における1981年から2010年までの3月の平均気温と桜(ソメイヨシノ)の開花日の資料があります。3月の平均気温と桜の開花日にはどんな関係があるのかを調べよう。

- ①どのように調べたらよいか考える。
 - ・ 二つの数量の関係を調べるには、表や式やグラフを利用してきた。
 - ・ まだどのような関係があるのか分からないので、式をつくることはできない。
 - ・ 資料を平均気温の小さい順に並び替えた表にする。
 - ・ 資料を基に、座標とする点を図に表した方が関係が分かりやすそう。
- ②3月の平均気温と桜の開花日を座標とする点をとって図に表し、どんな関係があ

るか調べ、説明する。

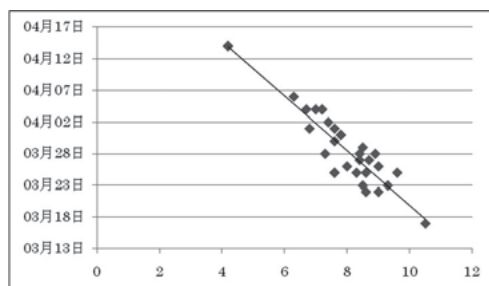


- ・座標とする点をとった図から、点の集まりが右下がりになっていることから、3月の平均気温が高いときは、桜の開花が早くなる傾向があるといえる。

(3) 【課題2】を考える

【課題2】2011年3月の平均気温は7.0℃でした。2011年の桜の開花日を予測してみましょう。また、どのように予測したのか、その方法を説明しよう。

- ・気温が7.0℃のとき開花日が4月4日だったときがあるから、4月4日であると考えられる。
- ・【課題1】でつくった図を基にして、点の集まりのなるべく中央を通るように直線を引き、一次関数とみなして、そのグラフを読み取る。



→4月1日か4月2日であると予測できる。

(4) 説明し伝え合う。

- ・予測した桜の開花日とその方法を説明し伝え合う。
- ・実際の資料を基に、関数の考え方を活用

してその傾向を分析することができ、予測できることを確認する。

(5) 学習を振り返る。

- ・2011年の桜の開花日を知る。
→4月1日だった。
予測した日とだいたい近い日だった。
- ・関数関係にあるとみなすことができる場合や相関関係がある場合はそれを利用して将来を予測することができる。

4 伝え合う活動について

【課題1】の場面では、「同じ気温でも開花日が異なるときがあったので、関数とはいえない。」といった関数の定義にかかわる発言や、「全体的に見ると右下がりになっていて、気温が高い方が桜が早く咲く傾向があるといえそうだ。」「全体的にみると関数っぽい。」といった、理想化したり単純化したりして事象を数学的にとらえている発言があった。【課題2】では、予測した日が複数意見として出されたが、なぜ、そのような予測をしたのか、説明し伝え合う活動の中で、回帰直線を引くことでより正確な日にちが予測できることに驚きの声が上がっており、関数の考えのよさを実感しているようであった。

「伝え合う活動」を充実させるためには、まず、生徒が説明したいと思う課題が必要である。日常生活や社会で数学を利用する、生徒にとって身近な場面がその一つであろう。そして、忘れてはいけないのが「数学的な表現を用いて」伝え合うことである。言葉や数、式、表、グラフなどを適切に用いて的確に表現できているかを評価しながら、指導に生かしていかなければならない。そして、伝え合うことにより生徒相互の思考や表現が質的に高まるようにすることが大切である。課題学習ではより一層これらのことを意識したい。

実践事例③

杓から数学を学ぶ (第1学年 空間図形)

上田 雅也

[北海道教育大学附属札幌中学校教諭]

1 はじめに

今回の学習指導要領改訂に伴い、「総合的な学習の時間」が縮小され、「選択教科」が廃止となった。選択教科としての数学の時間は、補充的な学習に取り組んだり、中学校で学習する数学を発展させて考えたりと生徒が主体的な学習を行うものであった。それは、生徒の興味・関心や習熟の程度に応じた適切な学習目標を定め、多様な学習活動を通して生徒のよさを伸ばし、教育の充実を図るものであった。こうした選択教科の時間が廃止になることは残念でならない。

一方、今回の改訂でも課題学習の扱いは変わらず、各学年の指導計画に適切に位置付けるものとされている。学習指導要領において課題学習は「生徒の数学的活動への取組を促し思考力、判断力、表現力等の育成を図るため、各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした課題を解決する学習」と示している。通常の授業では、数学的な活動を通して、楽しんだり、悩みながらじっくり考えたりといったゆとりをもつことはなかなか難しく、生徒が数学的活動の楽しさを実感するまでには至らないことが多い。そのような時間を確保することができるのが課題学習の時間である。一

人一人の生徒が、課題解決に興味をもって積極的に取り組むことにより、学びのなかに伝え合う活動が生まれ、数学を学ぶ楽しさを実感する。そうした課題学習を行うことが、生徒が数学の学習に主体的に取り組む意欲や態度の育成にむけて重要なこととして実践を紹介する。

2 実践のねらい

本実践は、日常の事象に関連付けた課題として、杓を用いた場面を設定し、空間図形の理解を深めることをねらいとする。杓を用いた観察、そして実際に水を入れて確かめるといった操作活動を通し、角柱と角錐の体積の関係について考察し、伝え合う活動が生まれ、一人一人の生徒が主体的に取り組むことをねらいとした。

杓は、現在、節分での豆まきや祝宴などでの日本酒の杯として利用されること以外に目にすることはないが、杓は本来体積を量る道具であり、古くから日本の農業、商業、そして人々の生活基準として活躍したものである。江戸時代には、杓の大きさの基準が統一され、穀物や酒、油などを量る道具として用いられてきた。本実践での目盛りが一切ついていない杓を用いて、昔の人たちはどのようにして量り分けていたのかを考察する活動は、日本の文化を知り、

現実世界における数学を実感することにつながる。また、枡を傾けることでの量り分ける活動を通して、直方体を2分の1にした三角柱や6分の1にした三角錐を直方体から見だし、そこには、これまでは感じることのなかった数学的な価値を感じ取り、伝え合う活動が生まれる学習へとつながるものとして実践した。

3 授業の展開

まず、枡を生徒に渡して実際に手に取らせ、枡について知っているのかを問うことから始めた。



生徒からは「お酒を飲むときに使っているのを見たことがある」「昔、お米を量るときに用いたことを聞いたことがある」といった言葉がでてきた。現在の生徒にとっては、枡は身近にあるものではないが、実生活の中で使われているものであることを理解していった。

そこで、枡がこれまで日本でどのように使われてきたのかについて「枡の歴史」についての話をした後、目盛りがついていない枡にもかかわらず、6合枡であれば、その枡1つだけで、1合から6合までのすべての量を量り出すことが可能であることを伝え、問題を提示した。

6合枡を1つだけ用いて、樽からお客さんの容器へどのように量りだしたのだろうか。



ワークシートを配付し、どのように枡を用いると量り出すことができるのかを考えさせた。



「枡一杯の量が6合だから、半分になれば3合がとれるはずだ。」

「斜めに傾けると3合がとれそうだ。」

「傾け方によって、他の値もとれそうな気がする。」

ここで、4人グループをつくり、実際に枡に水を入れて確かめる活動を行うこととした。水を入れたペットボトル数本を各グループに渡し、活動を始めさせた。用意した水には、食紅で色をつけることで、傾けたときの水面を分かりやすくした。

水の量を半分にすることで、3合になることを漠然と思っていた生徒も、実際に、水を入れて確かめる活動を行うことで、どのように傾けると3合を量り出すことができるのかをグループで話し合いながら実感していった。



また、図1のように傾けることで半分の量を量り出すことができることを理解した後、図2のように傾けた状態の水の量を実際に量ることで、1合であることを確認し、「なぜ1合になるのか」についての話し合いがグループの中で広がっていった。実際に活動を行う前は、図2の状態が1合であることを理解していない生徒が多かった。

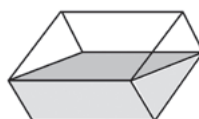


図1



図2

生徒の発言には、
「錐体ができているので、全体の3分の1ではないか」

「全体を半分にして、さらに斜めにして、半分にした状態なので、全体の4分の1ではないか」

といった誤ったイメージをもった言葉が多く聞こえた。そのため、実際に量ることで、1合になることを実感した活動は「なぜ」という疑問を大きくさせ、数学的思考を広げ、話し合いの活性化につながっていった。

6合枡で1合と3合をつくるのが、可能であることを全体で確認した後に、2合や4合、5合は量り出すことができないのかを考えることとした。

枡を傾けることで量り出すことができたのは、頂点と頂点をつなぎ、辺をつくりだすことで面が構成され、空間図形が枡の中につくられていることを、自分たちの実際に行ってきた活動と照らし合わせ、再確認することで納得していった。また、1合と3合の2つの体積の値を用いることで、他の量り分けも行うことが可能であることを確認し、課題の解決に至った。

<量り出す方法>

6合… 枡一杯。

5合… 6合から1合だけ残るように容器へ注ぐ。

4合… 6合から3合だけ残るように容器へ注ぎ、1合になるまで元の樽に戻し、その後、残っている1合を注ぐ。

3合… 枡半分になるように傾ける(図1)

2合… 3合から1合だけ残るように容器へ注ぐ。

1合… 枡を水面が底面の対角線と上面の1点を通る三角形となるように傾ける。(図2)

下の文は授業を終えての生徒の感想である。

MASTER BOX

枡を使うと、1合〜6合まで昔の人は測れていたことがわかった。
このおかげで、日常生活の中で発見したいことがして、よかった。
また、「なぜ」を思いやり、成り立ちの理由を考えたい。

せんもん 自分だけでなく、もろ一杯にふるまふ経験をはかて、それが1合、
半合、3合の分とわかっていく。

たいてい、体積がわかると、高さは同じで、底面積が半分の1合と3合の分がわ
かることは求められなかった。

体積は高さが同じで、底面積が半分の1合と3合の分がわかっていく。

体積と高さがわかると、底面積が半分の1合と3合の分がわかっていく。

4 おわりに

本実践では、枡という数学とは直接関係がないように思えるものから授業を展開した。しかし、その枡から生徒が数学の有用性をより深く実感するものとなった。

第1学年空間図形の単元では、小学校で学習してきた柱体と、これから学ぶ錐体との違いを明確にし、2つの立体を比較しながら、柱体と錐体との関係について理解させていくことが大切である。実際に空間図形を手に取り、観察したり、また厚紙等を用いて空間図形を作成したりすることにより、空間図形について直観的な見方や考え方が深められる。また体積等を調べる操作活動において、数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動を行うことで、数学的な思考力、判断力を伸ばすことが可能となるであろう。しかしながら底面が合同で高さが等しい角柱と角錐の体積の関係が3:1になることは理解しつつも、本実践のように直方体の中に現れる三角柱や三角錐を見出すことができない生徒が多い。本実践では実際に手に取り、考えることで「なぜ」という疑問が生まれ、他者に伝えたいという思いを生徒がもっていった。そうした伝え合う活動を引き出す課題学習を設定することにより、主体的に問題を解決していく活動となり、生徒個々の数学的な見方や考え方をさらに深めていくものになると考える。

実践事例④

正多面体 (第1学年 空間図形)

大塚 みずほ

〔お茶の水女子大学附属中学校教諭〕

1 はじめに

今回の学習指導要領の改訂では、普段の授業における数学的活動が強調されていることもあり、課題学習の意義が見えにくくなっているのではないかという印象を受ける。しかし、実際は、「各学年で指導計画に適切に位置付けるものとする」と学習指導要領にも明示されている。課題学習は、通常の授業では扱え切れないような、「各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりなどして見いだした課題」を設け、活動を重視した学習を行うものであり、「主体性」や「数学的な見方や考え方の育成」をより一層促進していくための学習と位置づけられる。

また、通常の授業を考えたときに、与えられたカリキュラムをこなしていく中で、1つの問題にじっくりと向かい合い、悩んだり、楽しんだりする機会をしっかりと確保することはなかなか難しい。そのような上で、課題学習の時間を指導計画にしっかりと位置づけ、時間を確保することはとても重要である。確保された時間の中で、生徒一人一人が様々な試行錯誤を行い、それらを伝え合い、高め合う活動を通してこそ、数学を学ぶ楽しさが実感できる。このような学習をめざして、今回の実践を紹介する。

2 実践のねらい

本実践では、正多面体を実際につくってみたいことを通して、正多面体への理解を深め、最終的には正多面体が5種類しかないと確認することをねらいとする。

普段の授業では、教科書の図や教師から提示された立体模型のみのイメージで正多面体をとらえていることが多い。また、教科書でははじめから5種類の正多面体が提示されていることが多く、他の可能性を考える余地がほとんどない。また、面の形や面、辺、角、頂点の数などを「覚えた」だけで正多面体を理解したと思っている生徒もいるように感じられる。しかし、実際に自分の手で模型を作ってみることによって、自分が理解していなかった部分を「疑問」として発見でき、その疑問を解決していくことで正多面体についてより深く理解できると考える。

また、作業の中で生まれた疑問を共有し、解決しようとする中で、伝え合う活動が生まれる。実際に模型を作る作業を取り入れることによって、普段は話し合いに参加するのが難しい生徒も、主体的に取り組むことが可能であり、伝え合う活動により関わりやすい環境が生まれるのではないかと考えた。

3 授業の展開

この授業を始める前の段階として、正多面体の学習を終えている段階であった。そこでまず、正多面体とはどのような立体であるかということについて確認をした。

正多面体とは多面体のうち、へこみのないもので、次の2つの性質をもつもの。
①どの面もすべて合同な正多角形である。
②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

そのうえで、次の課題を提示した。

課題：正多面体を作ってみよう。

この課題は3人から4人の学習グループに分かれ、立体模型「ポリドロン」^{※1}の正三角形、正方形、正五角形、正六角形を使い、正多面体の作成を行った。正四面体、正六面体（立方体）まではわりあい難なく作れるのであるが、正八面体、正十二面体、正二十面体については苦戦をしている生徒が多く、グループの中で試行錯誤している様子が見られた。特に、正六角形を使って立体を作ろうとして悩んでいる姿が見られた。また、作成が進んでいる生徒には「本当に他にも正多面体は作れないの？」という投げかけをして、他の立体作成の可能性がないか調べるように促した。

次に作成の中で各班から出てきた疑問について、全体で取り上げた。そして、各グループの中でこれらの疑問の答えを見つけていった。

疑問1：なぜサッカーボールのような形は正多面体といえないのか？

「サッカーボール型」については、「正五

角形と正六角形の二種類が使われているから正多面体ではない」とすぐに答えが見つかったようである。また、同じように、二種類の正多角形を使った、規則性のある多面体がほかにも作れることを指摘する生徒もいた。

疑問2：1種類の正多角形を使って作れる立体がたくさんできたけれど、これらは正多角形ではないのか？



図1

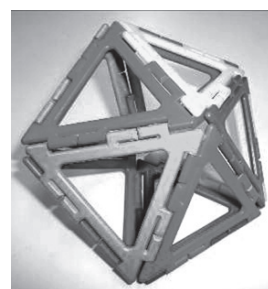


図2

この疑問の例として、図1や図2のような立体が挙げられた。先ほどの疑問1と違い、一目見ただけではわからないため、生徒の中には「これも正多面体ではないのか」という意識からなかなか抜けられない生徒もいた。しかし、自分たちで作った模型を見ながら「やっぱりどこかゆがんでいるようだ」という疑問を解決するために、グループ内での話し合いで、最終的に頂点に注目し、「1つの立体の中で頂点に集まっている面の数が違うところがあるから正多面体ではない」という結論を導くことができた。

疑問3：なぜ正六角形だけでは立体が作れないのか？

正六角形が2枚だと頂点が作れないし、3枚集まると平らになってしまってやはり頂点ができない、というところまではわかるが、その理由を説明するのに苦労していた。

「平らになる」ということと「角が集まって360°になる」ということがなかなかつながらない生徒も多いようであったが、模型を使いながらのグループ内の話し合いで、その点について確認をしていった。そして、正六角形の1つの角が120°であり、それが3つの面が集まると $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ となるので平面になってしまうことを全体で理解した。

また、この話し合いの中で、正 n 角形で $n \geq 6$ のときは、面が3つ集まると360°以上になるので、へこみがない立体が作れないことまで話が進められた。

疑問4：正多面体はなぜ5種類なのか？

疑問3の中で、1つの頂点には必ず3つ以上の面が集まること、正 n 角形 ($n \geq 6$) のときは正多面体が作れないこと、の2つが確認されたので、正三角形、正方形、正五角形について、1つの頂点に集まる面の数とその角度に注目した。

正三角形 (1つの角 60°)

$$3 \text{ つ} \rightarrow 60^\circ \times 3 = 180^\circ < 360^\circ \quad \bigcirc$$

$$4 \text{ つ} \rightarrow 60^\circ \times 4 = 240^\circ < 360^\circ \quad \bigcirc$$

$$5 \text{ つ} \rightarrow 60^\circ \times 5 = 300^\circ < 360^\circ \quad \bigcirc$$

$$6 \text{ つ} \rightarrow 60^\circ \times 6 = 360^\circ = 360^\circ \quad \times$$

よって、正三角形を使ってできる正多面体は、3種類

正方形 (1つの角 90°)

$$3 \text{ つ} \rightarrow 90^\circ \times 3 = 270^\circ < 360^\circ \quad \bigcirc$$

$$4 \text{ つ} \rightarrow 90^\circ \times 4 = 360^\circ = 360^\circ \quad \times$$

よって、正方形を使ってできる正多面体は、1種類

正五角形 (1つの角 108°)

$$3 \text{ つ} \rightarrow 108^\circ \times 3 = 324^\circ < 360^\circ \quad \bigcirc$$

$$4 \text{ つ} \rightarrow 108^\circ \times 4 = 432^\circ > 360^\circ \quad \times$$

よって、正五角形を使ってできる正多面体は、1種類

よって、今回作成すべき正多面体は確かに5種類しかないことが確認された。

4 授業後の感想より

授業後の感想の中には、

- ・ 今まで教科書の図とただでわかった気になっていたけど、実際自分で作ってみると、気づかなかった部分がたくさんあった。
- ・ 自分では気づかないことも多かったけど、他の人の話を聞きながら、自分も理解することができた。

という、肯定的な意見が多かった。一方で、

- ・ 話し合いについていくのが大変だった。

というような感想もあった。また、

- ・ 「1つの頂点に集まる面の数が同じだけれど、種類の違う正多面体」は何でできないのだろうと疑問に思った。(確かに作ってみると他にできないけれど…)

というような疑問もでた。今回はこのような疑問に答えることはできなかったが、オイラーの多面体定理などから理由を追及することは可能であり、今後の展開が期待できる部分である。

5 おわりに

本実践では、生徒の「疑問」を取り上げることで授業が展開したが、実際は生徒からの疑問をうまく拾えない場合も多い。そのような場合、教師のほうである程度の道筋をつけてあげることも考えられる。しかし、このような課題学習ではできるだけ生徒からの「疑問」を大切に、課題解決に結び付けていきたい。

※1：ポリドロンは、英国 Polydron International 社の登録商標です。

数学的活動へのイノベーション

反角柱の菓子箱を考察する

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]

1 はじめに

夏休みを利用した旅行先で、下の写真に示したような土産用の菓子箱を見つけた。写真では細部がわかりにくいですが、構造的には、どちらも同じで、上底面と下底面が平行で合同な正方形、側面が合同な二等辺三角形で囲まれた多面体である。

このような立体の体積を、中学校レベルの数学で求めることができるだろうか。

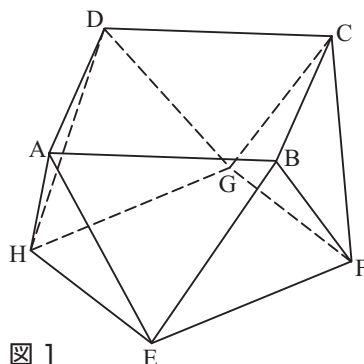


図 1

この立体は、四角柱をねじって側面の長方形を二等辺三角形にした多面体で、このような立体を「反角柱 (antiprism)」または「ねじれ角柱」という。なお、反角柱の中で、底面が正多角形のものを「正反角柱」という。図 1 の立体では、底面が正方形なので、「正反四角柱」というのだろう。

ネーミングはともかく、次に、この立体を真上から観察してみよう。どんなことに気づくだろうか。(図 2)

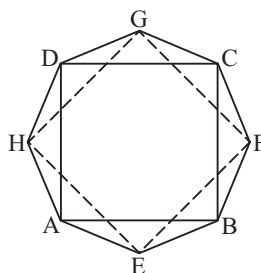


図 2

2 立体を観察してみよう

中学校の数学で、体積について公式化されている多面体は「角柱」と「角錐」であるから、その他の多面体の体積については、もし求めることができるのなら、これらの公式が使えるように、「対象図形を分解する」、「対象図形を囲んで不要部分を切り取る」、「対象図形を等積変形する」などの工夫が必要である。今回の立体については、どのような工夫をすればよいだろうか。

まず、図 1 を見てみよう。これは、上の写真の左側の立体の見取図である。

まず、下底面 EFGH は上底面 ABCD を対角線の交点を中心として 45° 回転移動させた位置にあるから、平面図は正八角形になる。

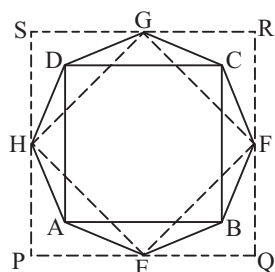


図3

また、E, F, G, Hは、下底面の対角線を1辺とする正方形 PQRS 上にあることがわかる。

(図3)

今回新しく学ぶことになった「投影図」は、このように空間図形を分析的に考察するツールの1つとして役立てるとよい。

以上のことから、四隅に三角錐部分を補えば、立体 ABCD-PQRS は正四角錐台となることがわかる。(図4)

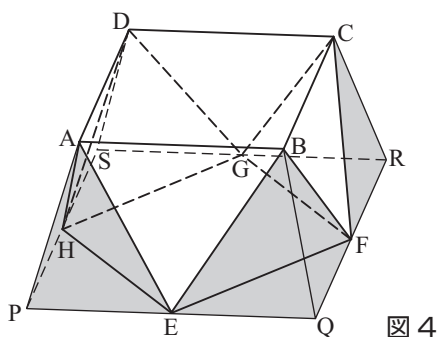


図4

3 角錐台の体積を求めよう

図5のような角錐台の体積は、どのようにして求めればよいだろうか。

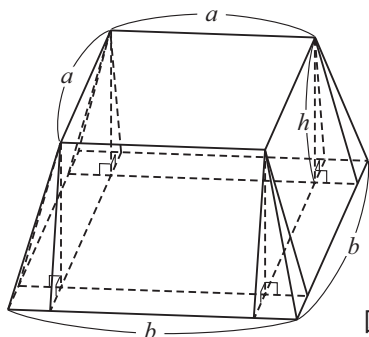


図5

いくつかの方法が考えられるが、ここでは、公式が使える立体に分割することを考

えてみる。図5のように、中心の正四角柱のまわりに、4つの三角錐と4つの三角柱ができることを確認しよう。これらをもとにして、この正四角錐台の体積 V を計算すると、 $V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$ となる。

この式を図4に適用して、図1の立体の体積を計算すると、 $b = \sqrt{2} a$ より、

$$\frac{2+\sqrt{2}}{3} a^2 h \text{ という式が導かれる。}$$

この式を「よむ」と、係数の関係から、同じ高さの正四角柱の体積より若干大きくなっていることもわかる。

ちなみに、角錐台の体積 V は図6のように相似の考えを利用して一般化すれば、

$$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$$

より、

$$V = \frac{1}{3} S_2 (x+h) - \frac{1}{3} S_1 x$$

を計算して

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

となることが導かれる。

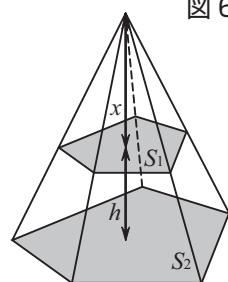


図6

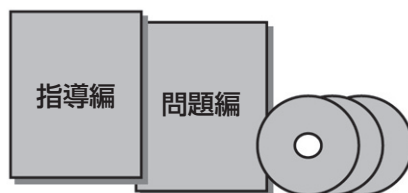
4 おわりに

「数学的活動を通して…」で始まる数学科の目標は、毎時間の授業において、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む活動となることを要請している。そのような授業の実現のためには、生徒が考えたくなる、また、考えるに値するよく吟味された教材を提示することを心がける必要がある。

指導する側も、日頃から「数学的な活動」を楽しむ機会を充実させながら、よりよい教材の開発を行うとともに、それを共有化する取り組みを推進したいものである。

平成 24 年度版 教師用指導書のご紹介

新しい『平成 24 年度版 教師用指導書』は各学年
指導編、問題編、DVD-ROM
で構成し、教科書をより効果的にご活用いただける
ように内容を充実させています。



指導編

- 年間指導計画
 - 章のはじめ
 - ・章の目標
 - ・指導計画面
 - ・関連する既習内容
 - 本文の解説
 - ・配当時間
 - ・小節の目標
 - 解答
 - ・指導上の留意点
 - ・観点別の評価規準例
 - ・よくある質問
- 解答

解答を別冊にて収録します。



問題編

- 準備テスト

診断的評価を目的とした、章の学習内容に関連する問題を掲載しています。
- 評価問題

小節ごとに、「数学的な見方や考え方」の観点を中心とした評価問題を掲載しています
- 章末の評価問題

評価の場面をさらに充実させるため、教科書の「章の問題」と同程度の評価問題を掲載しています。
- 課題学習ワークシート

教科書の「数学の広場」や「自由研究」などで取り上げられなかった課題を数多く掲載しています。

DVD-ROM

- 問題作成ソフト
- デジタル教科書

コンピュータを利用することで学習効果が高まるページについて、「デジタル教科書」を収録しています。
- 統計学習ソフト
- 素材集

「年間学習指導計画作成資料」, 「観点別の評価規準例」, 「教科書図版集」などを収録しています。

※平成 23 年 9 月現在で準備中の企画の内容を説明したものです。
企画の変更等がある場合もございますので、ご了承ください。

平成 24 年度版 教科書準拠問題集のご紹介

中学数学 基本問題集

1 ～ 3 年

B5 判・別冊解答付

- ・基礎・基本の確実な定着を図ります。
- ・レベル別に A, B の 2 段階にランク分けし、問題ごとに評価の観点を記載しています。



中学数学 実力アップ問題集

1 ～ 3 年

B5 判・別冊解答付

- ・基本問題から応用問題までを扱っています。
- ・レベル別に A ～ C の 3 段階にランク分けし、問題ごとに評価の観点を記載しています。



※平成 23 年 9 月現在で準備中の企画の内容を説明したものです。
商品名や企画の変更等がある場合もございますので、ご了承ください。

書籍のご紹介

『数学的文化化－算数・数学教育を文化の立場から眺望する－』

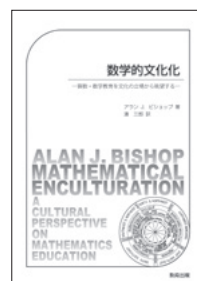
新刊

アラン J. ビショップ 著 湊 三郎 訳 定価 4,200 円 (税込)

「数学」と聞くと

身震いが生じる……

数学恐怖症や多数の落ちこぼれを生み出す西欧の数学教育はどこに問題があるのか。ビショップ氏はこの問題を解き明かし、教師のあるべき姿に貴重な示唆を与える。



『日本の算数・数学教育に学べ 米国が注目する jugyou kenkyuu』

J.W. スティグラー／J. ヒーバート 著 湊 三郎 訳 定価 2,310 円 (税込)

日独米 3 か国の数学授業ビデオや日本の小学校の算数研究授業の分析から、日本の算数・数学教育の優れている点をとらえ、米国の教育改善の指針を示す。

➡ 書籍に関するお問い合わせ：教育出版社販売部 TEL 03 (3238) 6965



【表紙・写真】

大田区民ホール「アプリコ」(東京都大田区)

「アプリコ」は、格子状のデザインが印象的なガラス張りの建物で、大小2つのホール、スタジオ等があり、地域の文化創造の拠点として設置された。外観は大田区の歴史の積み重ねが未来へと飛躍する上昇感を、波打つ屋根の形状は躍動感を表現しているという。



中学数学通信 coMpass (2011年 秋号) 2011年9月30日 発行

編集：教育出版株式会社編集局
印刷：大日本印刷株式会社

発行：教育出版株式会社 代表者：小林一光
発行所：教育出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町2-10 電話 03-3238-6864 (お問い合わせ)
URL <http://www.kyoiku-shuppan.co.jp>



わたしたちをとりまく自然や社会は、科学技術の進展や国際化、情報化、高齢化などによって、今、大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で、人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには、人や自然を大切にしながら、共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは、この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め、社会のさまざまな面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社 〒060-0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445 FAX: 011-231-3509
函館営業所 〒040-0011 函館市本町6-7 函館第一生命ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886 FAX: 0138-31-0198
東北支社 〒980-0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391 FAX: 022-227-0395
中部支社 〒460-0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821 FAX: 052-262-0825
関西支社 〒541-0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221 FAX: 06-6261-9401
中国支社 〒730-0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033 FAX: 082-249-6040
四国支社 〒790-0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193 FAX: 089-943-7134
九州支社 〒810-0001 福岡市中央区天神2-8-49 ヒューリック福岡ビル 8F
TEL: 092-781-2861 FAX: 092-781-2863
沖縄営業所 〒901-0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411 FAX: 098-859-1411