

coMpass

コンパス

● 基礎・基本を
しっかり理解させるための
「小さな数学的活動」

coMpass は教育出版が
発行する情報誌です



教育出版

コンパス

【目次】

| | | |
|------------------|---|----|
| 巻頭言 | 問いの統合及びつくりかえによる「小さな数学的活動」の構想 京極 邦明 | 3 |
| 特集 | 基礎・基本をしっかりと理解させるための「小さな数学的活動」 | |
| ● 実践例① | 「数と式」領域 大友 正純 | 5 |
| ● 実践例② | 「図形」領域 石川 和代 | 8 |
| ● 実践例③ | 「資料の活用」「関数」領域 村岡 友裕 | 11 |
| 連載 | | |
| ○ 数学的活動へのイノベーション | 吉野 茂 | 14 |
| ○ 研究会報告 | 安武 裕一 | 16 |
| 編集部からのお知らせとお願い | | 18 |

教育現場とリンク

教育出版

エデュコネット

入会金・会費は無料です!



EducoNet の会員を募集しています!

会員の皆様に、インターネットを通じて
教育情報をご提供 します。

EducoNet
とは...

教育関係者専用 のWEBサイトです。

役立つ資料・情報の宝庫 です。

- 教育情報.....教育界の動向等の情報提供
- 教科のページ.....年間指導計画・評価基準・高校シラバス・教科別お役立ちコーナー・編集部からのお知らせなど
- メールマガジン...教育関連情報をタイムリーに発信

会員は...

- ◆会員専用のコンテンツにアクセスできます。
- ◆メールマガジンが定期的に配信されます。

申し込みを受け付け後、ID・パスワードを勤務先に郵送します。

教育出版EducoNet会員登録について

★WEBにて受け付けています!!
教育出版ホームページまたは
<http://educonet.jp/entry.html> に
アクセスしてください。

※個人会員のほかに、教育委員会・学校単位での申し込みも受け付けます。

教育出版ホームページの主な内容
<http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

EducoNet (会員制)

- ・年間指導計画
- ・評価基準
- ・教科別お役立ちコーナー
- ・教科通信
- ・ニュースレター
- ・各種教育情報
- ・編集部から
- ・メールマガジン

■ 情報提供

... 教育情報 総合的な学習 研究会日程

■ 各種リンク集

■ ご案内

... 教科書内容 教師用指導書 教材品

■ 教科書関連資料・写真館

■ 新刊書紹介

■ もの知りテーマパーク

■ 地球時代の教育情報誌Educo

異符号の2数の加法の前に、同符号の2数の加法を学習する。これを活用するという立場から、1年 p.20～21の[問3],[問4]を次のように統合したらどうだろうか。

「たいちさんの班の移動を、

- ① 数直線上の矢印で表してみよう。
- ② 式で表してみよう。
- ③ 絶対値と符号に分けてことばで表してみよう。」

これは、生徒に「同符号のときのきまりにあたるものを異符号について見付ける」という目的意識をもたせ、小さな数学的活動を促すためである。このような問いの統合により、見通しのある小さな数学的活動をすることが可能になる。(なお、本稿での統合は日常使われている意味の統合である。)

(b) リアリティの高い問題へつくりかえる

2年「三角形と四角形」の章では、p.159の[Q]を次のようにつくりかえると、平行四辺形の条件を見いだす小さな数学的活動になる。

図1

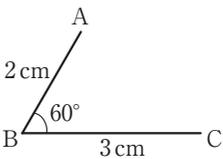
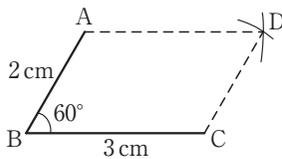


図2



「図1のように3点A, B, Cが与えられたとき、図2は2組の対辺がそれぞれ等しくなる(*)ように頂点Dをとって、 $\square ABCD$ をかいたところを示しています。

- ① 図1が与えられたとき、図2以外の方法で頂点Dをとって、 $\square ABCD$ をかきなさい。
- ② ①のそれぞれのかき方を、(*)にならってまとめなさい。」

辺の長さや角度が実際にわかっていないと、子どもはその状況にリアリティを感じないため活動が滞る。[Q]をつくりかえる

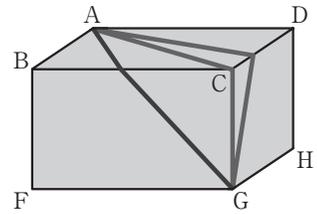
ことによって、リアリティの高い状況で目的意識をもった小さな数学的活動ができる。

ここでの小さな数学的活動は、「数や図形の性質を見だし発展させる活動」と捉えることができる。条件を導き、証明するところまで学習させること(発展として)も可能だが、ここでは条件を導くことに焦点化し、証明は後回しにする。小さな数学的活動という趣旨を徹底するとそのような扱いが妥当であろう。

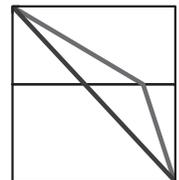
(c) 問題の本質を把握できるようにする

1年 p.209の[Q]を、次の下線部のように手立てを示唆するようにつくりかえて[問1]と統合して提示し、数学的活動を促したらどうだろうか。「下の直方体で、頂点Aから頂点Gにひもをたるまないようにかけます。直方体を組み立てるときの図の一部をかいて、必要な長さを測り、一番短いコースを答えなさい。」

ここでの小さな数学的活動は、「日常生活で数学を利用する活動」に該当するであろう。実際に直方体を組み立てるときの図の一部をかいて、3次元の図形と2次元の図



形の往還をさせ、たとえば8.6cm(太い黒線)のように長さを測ることを通して問題の本質が見えてくる。このような小さな数学的活動を通して、「最短のとき、見取図のうえでは折れ線にみえる線が展開図では線分になる」という本質を把握させることが、この問題のねらいである。このねらいが達成されれば、空間図形に対して実感を伴った理解がもたらされるであろう。



実践例①：「数と式」領域 方程式の解き方を理解するための 数学的活動

大友 正純 [秋田県秋田市立山王中学校教諭]

1 何のための数学的活動？

平成10年告示の学習指導要領において数学的活動という言葉が初めて登場し、以来、数学的活動は数学教育の中心的な課題として位置づけられながら様々な実践研究が進められてきた。

平成20年改訂の学習指導要領では、数学的活動が目標の冒頭に取り上げられ、数学学習における数学的活動の重要性は揺るぎないものとなった。また、「中学校学習指導要領解説 数学編」では、数学的活動を「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」と定義し、3つの活動を具体的に明示している。

- ア 数や図形の性質などを見いだす活動
- イ 数学を利用する活動
- ウ 数学的に説明し伝え合う活動

基礎・基本の理解のためにはアが中心的な役割を担うだろうが、あやふやだった基礎・基本の理解をより強固なものにするためにはイやウといった数学的活動が必要となる。特に、その理由を説明し伝え合う活動は、一層重要視する必要がある。

本稿では、各学年で学習する「方程式」を取り上げ、方程式の解き方を確実に理解するための説明し伝え合う活動を中心とした数学的活動を紹介していく。

2 第1学年「方程式」

方程式を解くことは方程式を $x = \square$ の形に変形することであると確認した上で、次の方程式を変形するために等式の性質をどのように使ったらよいか考える。

<教科書「中学数学1」p.96～97>

- 例題1 $x - 3 = 5$
- 例題2 $x + 4 = 1$
- 例題3 $\frac{1}{3}x = 10$
- 例題4 $4x = -20$
- 例題5 $6x - 7 = 11$

<生徒の反応例>

例題1, 2について

「例題1は、 $x = \square$ の形にするには-3がじゃまになっています。これを0にしたいので私は両辺に3を加えました。」

「例題2は、 $x = \square$ の形にするには+4がじゃまになっています。これを0にしたいので私は両辺に-4を加えました。」

「私は、0にしたいので両辺から4をひきました。」

例題1, 2は、左辺にある数の項を0にするために等式の性質を利用する問題である。ここでは、操作を単に説明させるだけではなく、「-3や+4がじゃまだったから等式の性質を利用したんだ」といったよう

に、背後に潜む理由をはっきりと説明させることに重点を置く。また、「 -4 を加えること」と「 4 をひくこと」は同じことであることを再確認することもできる。

例題3, 4について

「例題3は、 $x = \square$ の形にしたいけど $\frac{1}{3}$ がじゃまになっています。 x の係数を1にしたいから、私は両辺に3をかけました。」

「例題4は、 $x = \square$ の形にしたいけど4がじゃまになっている。 x の係数を1にしたいから、私は両辺を4でわりました。」

「私は4がじゃまになっているから、4を1にするために $\frac{1}{4}$ をかけました。」

例題3, 4は x の係数を1にするために両辺に同じ数をかけたり、わったりする問題である。例題1, 2ではじゃまな部分を0にしたかったが、今回は x の係数を1にしたいために、その逆数をかけたり、同数でわったりする操作が必要となる。ここでも、「 $\frac{1}{3}$ や4がじゃまで1にしたかったから等式の性質を利用したんだ」といったように、理由をはっきりと述べさせたい。

例題5について

「例題5は、6と -7 がじゃまになっている。まずは、 -7 を0にするために両辺に7を加えてから、両辺を6でわりました。」

「私は最初に両辺を6でわったけど、約分ができなくて途中で終わりました。」

例題5は、じゃまな数が2つあるため、等式の性質を2回使わなくてはいけない。方程式に慣れた者ならば -7 から消すことになんら違和感を持たないだろうが、方程式初心者1年生にとっては、どちらから対応すべきか迷うところである。実際に、最初に6でわった式と、最初に7を加えた

式を比較し、検討を重ねる活動があってもよいだろう。

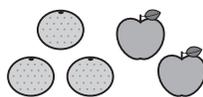
何のために等式の性質を利用するのか、その必要性を感じる事が方程式の解き方を理解する上で最も大事な部分である。説明し伝え合うといった数学的活動によって、その必要性を十分に感得することが可能となる。思考の様子を言語化する数学的活動は、基礎・基本を確実に定着させるためにもとても重要な活動といえよう。

3 第2学年「連立方程式」

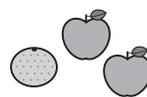
<教科書「中学数学2」p.40 >

あるスーパーで、みかんとりんごがセットになって売られていました。

Aセット 540円



Bセット 380円



それぞれみかん1個、りんご1個の値段は同じだそうです。みかん1個、りんご1個の値段はいくらだろう。

<生徒の反応例>

A君の式

$$540 - 380 = 160 \quad 160 \div 2 = 80$$

$$380 - 80 = 300 \quad 300 \div 2 = 150$$

みかん 80円 りんご 150円

B君の式

$$3x + 2y = 540$$

$$x + 2y = 380$$

ここで次のように問いかける。

A君はどんな考え方でみかんとりんごの値段を求めたのだろう。A君の考え方をカードを使って説明してみよう。

みかんとりんごの絵のついたカードを渡

し、カードを操作しながらA君の考え方を推測する。

<生徒の反応例>

AセットとBセットの違いはみかん2個分。だからみかん2個で160円。

よって、みかん1個80円

| | | |
|--------|--------|------|
| ●●●●●● | ●●●●●● | 540円 |
| ●●●●●● | ●●●●●● | 380円 |
| | | |
| ●● | | 160円 |
| ● | | 80円 |

Bセットはみかん1個だから、380円から80円をひくとりんご2個の値段になる。だから、りんご1個は150円。

| | | | |
|----|------|---|------|
| ●● | 300円 | ● | 150円 |
|----|------|---|------|

さらに次のように問いかける。

B君は連立方程式をつくったようだけど、 x と y の値が求められなくて困っているようだ。A君の考え方を使って、解くことができないか考えてみよう。

みかんのカードを x 、りんごのカードを y に置き換えると、 x と y の値が加減法によって導き出される様子が浮かび上がってくる。こうした数学的活動を通して、算術的な解き方から代数的な解き方への転換がスムーズに行われ、加減法の仕組みが十分に理解できるようになる。

4 第3学年「2次方程式」

2次方程式の解き方には因数分解による解き方、平方根の考えによる解き方、解の公式による解き方がある。

まずは、因数分解を使って2次方程式を解くことから考えてみる。

<教科書「中学数学3」p.73>

2次方程式 $x^2 - 6x + 8 = 0$ の左辺を因数分解してみよう。そして、左辺が0になるときの x の値について考えてみよう。

<生徒の反応例>

- ・ $(x-2)(x-4)$ が0になるということは $x-2$ と $x-4$ が0にならないといけない。
- ・ x には同じ数があてはまるから $x-2$ と $x-4$ の両方が0になることはない。
- ・ $x-2$ または $x-4$ のどちらか一方が0になればよい。

こうしたやりとりを通して、 x は2であってもよいし、4であってもよいといった結論が導き出されていく。

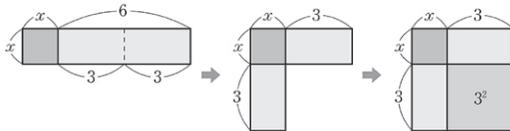
平方根の考えによる解き方では、 $ax^2 + c = 0$ 、 $(x+m)^2 = k$ の形の解き方を学んだ後で、 $x^2 + px + q = 0$ の形をした2次方程式について考えていく。

$x^2 + 6x - 2 = 0$ の解き方を考えてみよう。 -2 を右辺に移項すると $x^2 + 6x = 2$ となるけど、 $(x+\square)^2 = \triangle$ の形にするためにはどうしたらよいだらう。

<生徒の反応例>

- ・ $x^2 + 6x + 9$ だったら $(x+3)^2$ に因数分解できるのになあ。
- ・両辺に9を加えるといいのかな。

ここで、両辺に9を加えることの必要性を確認するために、教科書p.78にある図と同じカードを配布する。



実際にカードによる操作活動を通して、 $(\quad)^2$ の形が正方形の面積を表していることを理解し、9を加えることで $(\quad)^2$ へと因数分解できることに気づくことができる。こうした数学的活動も方程式の解き方を考える上で有効である。

実践例②：「図形」領域

理解を深めるための「実感」を意識した指導事例

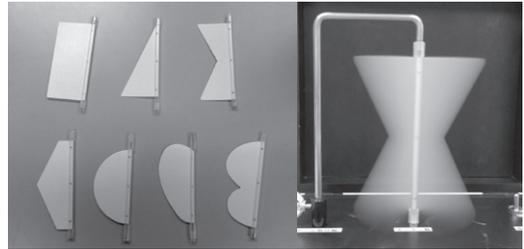
石川 和代

[東京都豊島区立千登世橋中学校主任教諭]

数学的活動というと難しく考える人もまだ多い。しかし、教科書の流れを読み取り、行間を埋める発問や指示をしていくことで授業中の数学的活動は飛躍的に多くなる。

教科書の説明をそのまま読み進めるのではなく、そこを課題として実体験させたり、発問を1つ増やして考えさせたり、身近な例を取り上げることが数学的活動につながる。以下にその例を4つ挙げよう。

直線 l を軸として1回転させてできる回転体の見取図をかきなさい。



1 教科書の問いを広げる

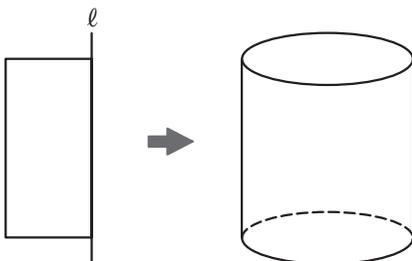
<教科書「中学数学1」p.207>

 面をある直線のまわりに回転させてできる立体について考えてみよう。

 右の写真は、長方形のガラスが軸を中心にして回転するドアです。1回転すると、どのような立体ができるでしょうか。



上記のQを考えさせた後、次のような活動で教科書の問いをさらに広げていく。



長方形から始めて、いくつかの図形について1問ずつ予想させて見取図をかかせ、実際に回転しているところを見せ、予想と観察を繰り返していく。段々と線対称な図形を想起して活用したり、「回転の軸」や、「母線」を意識して考えるようになる。予想がうまくできた生徒に「どのように予想したのか」、「どういった手順で予想したのか」と問いかけてみて、「回転の軸」や「母線」に触れた発言を引き出ししていく。この段階では「ここ」とか、「この線分」といった表現でよく、その後に「回転の軸」、「母線」という用語を学べば、生徒は必要な用語として受け入れ、新しい知識が定着する。

また、この授業では生徒は自分の頭の中に描いた図形を、見取図を使って表すことになるので、見取図をかくという既習事項の活用にもなる。

2 教科書の説明を実体験させる

三角形の合同条件を学んだ後、予め用意した三角形の厚紙と合同な三角形を作図するというクイズ形式の授業を行う。生徒は三角形の6つの条件(角の大きさ、辺の長さ)のうち3つだけを質問することができることとし、質問によって得られた条件を使ってコンパスと定規、分度器で三角形を作図する。

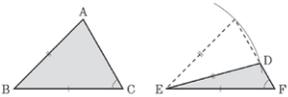
答え合わせは、厚紙をノートの図に合わせてぴったりと重ね合わせることができれば正解となる。厚紙とぴったり合うかどうかを目の前で見ることができるので、かなり意欲的に作図をすることになる。

三角形の合同条件に合わせて質問すればいいことが分かってきたところで、3つの条件があるにも関わらず、合同にはならない場合があることを実体験させる。

<教科書「中学数学2」p.121 >

右の図の△ABCと△DEFのように、「2組の辺と1つの角」を等しくしても、合同にはならないことがある。

これに対して、「2組の辺とその間の角」を等しくすると、前ページの問1でかいたように、いつでも合同な三角形をかくことができる。



$BC = 6\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $\angle C = 40^\circ$
の三角形を作図しなさい。

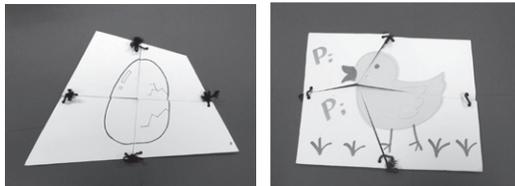
実際に作図させ、全員のノートを確認すると2種類の三角形ができていることに気がつく。(2種類出ない場合はこちらで用意したものを提示し、これも条件に合った三角形ではないか、と問いかける。)

このように教科書の説明内容を実体験することで、三角形の合同条件をただ覚えるべき事項として捉えず、条件に当てはめて考えればよいというよさや、細かい部分

(「その間の角」など) のことばの意味も考えるようになる。

3 実物からスタートする

2年5章「三角形と四角形」の導入とともに、見せたいものがある。「ハトメ返し」というおもちゃだ。

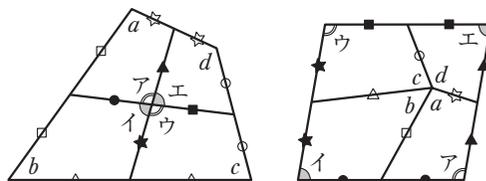


このおもちゃは導入の図にある四角形の移動の仕方とは違った方法で平行四辺形を作っており、どちらも平行四辺形になるための条件を考える意味が伝わるような場面設定になっている。

平行四辺形になるための条件を学んだあとにもう1度このおもちゃを提示して考察したい。

実例としては、各自作った様々な四角形の各辺の中点を取り、2組の対辺の中点をそれぞれ結ぶ。ハトメ返しと同様に中点を結んだ交点がつくる角を4つとも、もとの四角形の頂点を中心にして外側へとそれぞれひっくり返し、四角形を移動させるとどんな四角形となるのか、生徒に実際に作らせ作業させる。その後、できた四角形を実物投影機で見せながら考えさせる。

平行四辺形になることが見えてきたところで、果たして、「本当にいつでも平行四辺形となるのか」を問う。



角の大きさや線分の長さが同じであるものには同じ記号をつけていき、その時にどうして同じになるのか、をていねいに扱う必要がある。手元に作業のできる厚紙（先ほど各自作成した四角形）を用意し、それを使って一緒に確認しながら同じ角や線分に記号をつけていき、考えさせる。

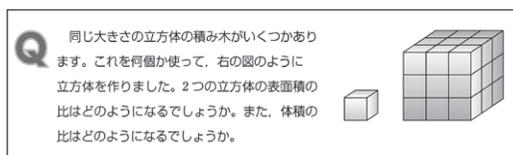
どうして同じになるのか、説明を求めていけば、「もとの四角形の対頂角だから」や「中点だから」などの意見が出てくる。最終的に根拠として、平行四辺形になるための条件がいれば証明できるということを理解させる。

この教材は、身近なおもちゃの原理にも数学が利用されているということを実感させるのによい教材である。導入教材と合わせて使うと、さらに考察は深まる。また図形の移動の活用としても学習でき、ハトメ返しは他にもいろいろな図形の移動の仕方があるので、発展問題としても取り上げることができる教材である。

この授業のように、証明を記述するというところにこだわらず、ことばで説明できればよいとする活動を行うことで、証明をかくことが苦手な生徒にも論証の考察に興味を持たせたい。いきなり記述式の問題にするのではなく、このような作業とことばでの説明を繰り返しながら、論証の授業を進めていきたい。

4 予想を大切にす

<教科書「中学数学3」p.154>



身近にあるものを見せ、予想させる発問

をし、さらにその予想がくつがえるような教材であると印象に残りやすく知識が定着しやすい。予想をくつがえすような教材として、次の普通ののりと特大ののりを見せる授業がある。



特大ののりの量は、普通ののりの量の何倍でしょうか。

高さはおおよそ2倍であるという条件を伝え予想させる。出た答えの中から選ばせて挙手させると、3倍に手を挙げる生徒が多い。

その後、教科書のQの授業に入り、体積比を学んでいくことになる。

最後にまた授業冒頭に紹介したのりの答えを質問し、おおよそ8倍になっていると答えさせる。実際に普通ののりの量（50g）を提示して8倍し、特大ののりの量（400g）を確認する。

この授業は本時で学んだことを生かすと最初の課題が達成でき、新たな知識の獲得に意義が感じられ、また、当初の予想がくつがえされるので生徒の記憶にも残りやすい。

以上の4例は、生徒が課題を自らのものとし、熱中して参加した授業である。

数学ができていく過程の追体験や身近なものの考察で、生徒は主体的に学ぶ姿勢を身につけ、有用性を感じながら知識を獲得し、定着させる。数学的活動で得られる実感こそが、理解そのものではないだろうか。

実践例③：「資料の活用」「関数」領域 単元の導入での指導の工夫

村岡 友裕

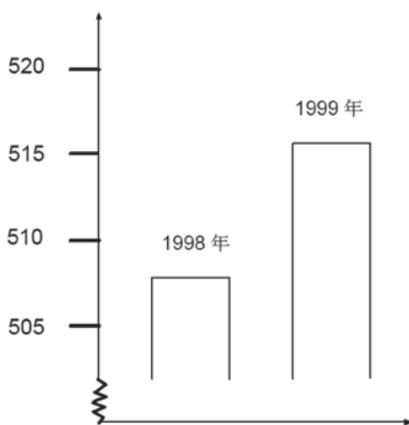
〔神奈川県川崎市立柿生中学校教諭〕

1 第1学年「資料の散らばりと代表値」 ＜導入＞

～「イ 日常生活で数学を利用する活動」、
「ウ 数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動」をねらいとして～

あるTVレポーターがこのグラフを示して、「1999年は1998年に比べて、盗難事件が激増しています」と言いました。このレポーターの発言は、このグラフの説明として適切ですか。

年間の盗難事件数



(PISA2003 調査より)

有名な問題なので、ご存知の方も多と思うが、生徒は一見すると、レポーターの言っていることに間違いはないと考えてしまう。しかし、いろいろな角度で考えていくなかで、割合（増加率）に注目することにより、必ずしもこのレポーターの言っていることは正しくないことが判明していく。

新学習指導要領では「資料の活用」領域が新たに設けられた。以前の「資料の整理」とは異なり、ただ単に資料を整理するだけでなく、その結果を用いて、考えたり判断したりすることを重要視する領域である。

今日、急速に情報化社会へと発展している。そのため、これからの社会では、目的に応じて資料を収集・整理し、その傾向を読み取って判断する力が必要となってくる。

この問題を通し、この単元では「情報に騙されることなく、主体的に自分の考えで判断できる力」を身につけていくことが目標であることを生徒に伝えた。

生徒は、他の領域や単元よりも実生活に近い問題としてとらえ、数学が苦手な生徒も、意欲的に学習していく場面が見られた。

2 第3学年「標本調査」〈導入・まとめ〉

～「イ 日常生活や社会で数学を利用する活動」, 「ウ 数学的な表現を用いて, 根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」をねらいとして～

まず, 導入では, 無作為に抽出された標本から母集団の傾向を推定すれば, その結果が大きく外れる危険性が少ないことを実感させることを目標とし, 以下の課題を設定した。

国語辞典(一人1冊配布)には, いくつの単語が収録されていると思いますか。3分間で予想してください。

具体的な操作活動を通し標本調査を実感することは, 数学が苦手な生徒にも取り組みやすい。

国語辞典などは, 1ページ当りに掲載されている単語数の差が少ないので, 標本調査と全数調査(辞典には, 収録単語数が記載されている)の差が少なくなるので, 生徒は, 標本調査の有意性を実感できる。

また, この単元では, 標本調査では, 予測や判断に誤りが生じる可能性があることも実感させる必要がある。そのため, 単元のまとめとして,

□4 この教科書で, 1ページ平均何個の漢字が使われているかを調べます。10ページを標本として取り出して推測しなさい。図

〈教科書「中学数学3」p.220〉

を, 同じ時間設定で, 4人班で行う課題が考えられる。教科書では「10ページを標本として」とあるが, これを「3分間で」として行う。これは,

① 標本調査を行う必然性をもたせる

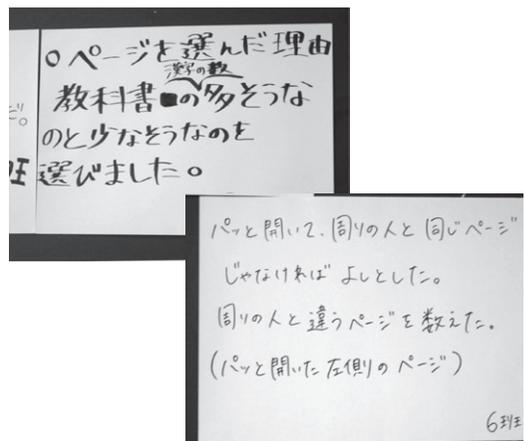
② あまりにも多くの標本を抽出させない(あえて班の平均をばらつかせる)

といった理由からである。班ごとに予想した答えとページの抽出方法を発表させるが, 数学の教科書は1ページ当りに掲載されている漢字数の差が大きいので, それぞれの班の予想した答えがばらつくことが予想される。

そこから, 「なぜ, 班で, ばらつきが生じたのだろうか」, 「どうしたら全数調査の結果に近くなるのか」という投げかけから, 標本を抽出するときの留意点や, 取り出す標本の数などについて考えることができる。

なお, 教員の時間に余裕があれば, 全数調査を行い, その結果を生徒に提示するとより理解が深まると思われる。

〈各班の, 標本の抽出方法の発表〉



〈生徒感想〉

4. 標本調査について学んだこと, 気づいたことを書いてみよう。

- ・ 調べたページ数が多ければ平均に近くなる。
- ・ 意図とバラバラのページのほうが平均が正確。
- ・ 標本調査はちゃんとした平均は正確だった。

3 第2学年「1次関数」＜導入＞

～「ア 既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見だし、発展させる活動」をねらいとして～

数学が苦手な生徒にもシンプルに考えられる導入課題として、以下のような課題を行った。

課題 1

(1) 空欄に当てはまる値を考えよう。

| | | | | | |
|-----|---|---|---|----|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 3 | | 9 | 12 | |

(2) このような関係を何といったでしょうか。

(3) y を x の式で表してみよう。

(3)の後に、「 $y = ax$ で表せるものを、比例といました。」と確認する。

課題 1 は比較的容易に答えることができた。また、この課題を通して、比例の復習を行うことができる。

次に、課題 2 を行う。

課題 2

(1) 空欄に当てはまる値を考えよう。

| | | | | | |
|-----|----|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 12 | | 4 | 3 | |

(2) このような関係を何といったでしょうか。

(3) y を x の式で表してみよう。

(3)の後に「 $y = \frac{a}{x}$ で表せるものを、反比例といました。」と確認する。

課題 1, 2 で、既習の比例・反比例の復習を行った後で、課題 3 を行う。

課題 3

(1) 空欄に当てはまる値を考えよう。

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 3 | | | 9 | |

(2) これは、比例ですか。反比例ですか。

(3) y を x の式で表してみよう。

生徒にとっては初めて見る関数であり、多少の時間を必要とするが、「課題 1, 2 のときは、どのように解決したかな」と問いかけ、「 x に何をすれば y になるのか分かればよい」ことに気付かせる。そして、試行錯誤の中から、生徒のいろいろな考えを練り上げ、「 x を2倍して、1を加えれば y になる」ことを発見させる。

生徒には、「比例でも反比例でもない関数が存在すること」、「実はこういったものを1次関数ということ」、「これから、この1次関数を学習していこう」と話し、学習を進めていった。

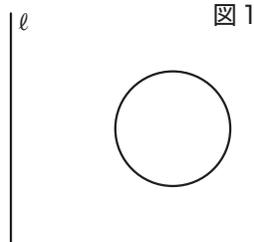
数学的活動へのイノベーション ドーナツ形を探究する

吉野 茂

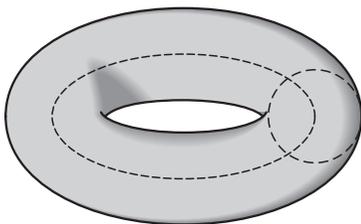
[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]

1 はじめに

この春から使用されているいくつかの検定教科書の中で、下の図1に示すように、円を直線 ℓ のまわりに1回転させてできる立体について考えさせる場面を設定しているものがある。



この回転体は、ご存じのとおり、図2に示すような円環体と呼ばれる立体である。身近な立体としては、環形蛍光灯やドーナツ、あるいは浮き輪などがあげられるであろう。



本稿では、この回転体について、計量の面にも注目しながら、中学生なりに納得できる活動にするための方策について考えてみたい。

2 既知の考えをもとにして

この立体の体積を求めることは、積分の応用として、高校の教科書の例題でとりあげられているが、これを中学生にも取り組めるように、求め方を工夫してみよう。

まず、回転させる面を正方形に変えた場合と比較しながら考えてみる。(図3)

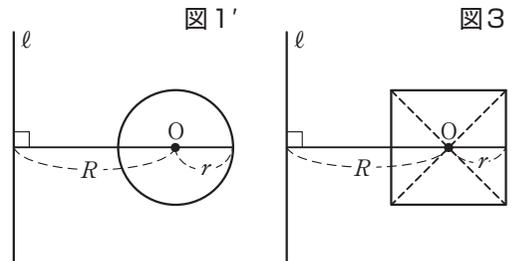


図3のような問題は、中学校のどの教科書でも扱われる定番メニューの1つである。ここでは、図1'との比較のために、正方形としたが、一般的には長方形でよい。身近な立体としては、トイレトーパーやバウムクーヘンなどがあげられるであろう。

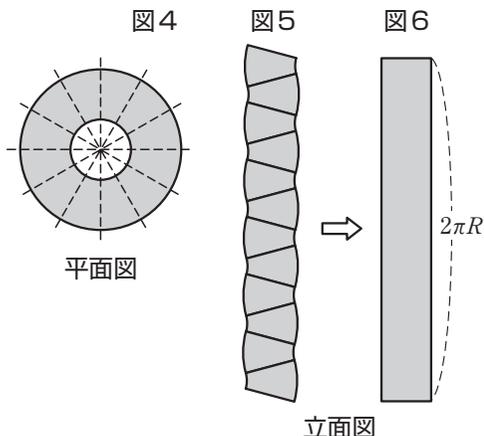
図3の回転体の体積は、ふつう次のように円柱の体積の差を計算して求める。

$$\begin{aligned} & \pi(R+r)^2 \times 2r - \pi(R-r)^2 \times 2r \\ & = 8\pi Rr^2 \end{aligned}$$

しかし、図1'の場合には、このような考え方が使えないから、何かの別の方法を検討する必要がある。

そこで、「円の面積公式」や「中心角を使わないおうぎ形の面積の求め方」(教科書

1年 p.190 参照) を考えたときのように、同心円部分を図4のように等分し、図5のように、回転する面を交互にあわせて積み重ねた立体を考えてみる。



等分する数を増やしていけば図6のような柱体とみなせるという説明は、小学校で円の面積を長方形に帰着させた考え方と同じである。曖昧さは残るものの、中学校の数学としては許容してよいであろう。高さの $2\pi R$ については、次のようにして求めればよいことを確認しておきたい。

$$\frac{2\pi(R+r)}{2} + \frac{2\pi(R-r)}{2} = 2\pi R$$

さて、柱体とみた図6の体積を実際に計算してみると、図3の場合には、回転する面(正方形)の面積が $4r^2$ であるから、

$$4r^2 \times 2\pi R = 8\pi Rr^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるが、これは前述の円柱の体積の差をもとにした結果と一致する。

この方法を認めることにすれば、図1'の場合には、

$$\pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

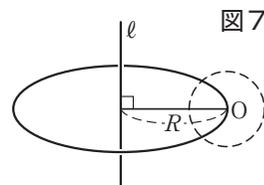
ということになる。 π が2乗になるところが新鮮だが、この結果は積分を使って求めた結果と一致して正しいものである。

3 文字式をよむこと

前述の式①と②の左辺に注目してみよう。この中で、 $2\pi R$ は柱体の高さとして扱ったが、これは回転させた面の中心(重心)がえがく曲線(円周)の長さに等しいと考えることができる。(図7)

したがって、①と②の左辺の求め方は、
(回転する面Fの面積) × (Fの重心の移動距離)
とまとめることもできる。

実は、これは、
パップス・ギュルダンの定理と
よばれているもので、これを使



うと、回転体の体積を考えるときには便利なこともある。上記の課題のように、回転する面が点対称な図形ของときは、対称の中心が重心となるので扱いやすいが、一般的には、回転する面の重心が簡単には求められないことに留意する必要がある。

さて、体積についての探究が終わったら、今度はこの回転体の表面積についても考えさせたい。これについては、再び図6に注目することにより、柱体の側面積と等しくなることが容易にわかるであろう。

さらに、この回転体の表面積を、「パップス・ギュルダンの定理仕立てにすることができないか」と考えることは興味ある話題となる。

4 終わりに

今回の題材は、高校で学習するとはいつても、これは数Ⅲの内容であるから、履修するのは理系を中心とした一部の生徒だけである。したがって、多少の曖昧さはあるものの、今回のような扱いで中学生に体感させておくことは、それなりに意味のあることではないかと考えているのであるが、いかがであろうか。

数学的な表現力をはぐくむ指導の在り方

安武 裕一 [宇都宮大学教育学部附属中学校教諭]

<実施日 2012年6月21日>

1 数学科研究テーマについて

本校数学科では、平成23年度から「数学的な表現力をはぐくむ指導の在り方」という研究テーマのもと、研究を進めてきた。今回の研究では、「考える力」を育てるためには、自分の考えを相手にきちんと伝えるように表現し、より緻密に自分の考えを振り返らせることに重点を置く必要があると考えた。つまり、数や図形の性質などを的確に表したり、根拠を明らかにして筋道を立てて説明したり、自分の思いや考えを伝え合い、それらを共有したり質的に高めたりすることが重要なわけである。すなわち「表現する力」を高めていくことから「考える力」に結びつけていこうと考えたのである。

以上のことから、今求められている思考力・判断力・表現力等をはぐくむためには「数学的な表現力をはぐくむこと」に焦点を当てて研究を進めていく必要があると考えた。そこで主題を「数学的な表現力をはぐくむ指導の在り方」とし、研究を進めていくこととした。

2 研究内容

本校数学科では、生徒が互いの考えを伝え合ったり、練り合ったりする場面を通して「数学的な表現力」をはぐくもうと考えた。つまり、生徒同士で話し合いをする場面で、どのような手だてをうてば生徒の「数学的な表現力」をはぐくむ話し合いができるのかを考えた。次に、どのような課題を与えれば、生徒達は互いの考えを表現し合おうとするのかを考えた。ただ、「話し合う」と言っても、そこに話し合う意義や意味を感じなければ、生徒達はよりよい表現

をしようとはしない。生徒が進んで話し合い、よりよい表現をしようとするような場面をつくるためには、どんな課題を与えたらよいのかを考えた。

一つ目の「より効果的な話し合いをさせるための手だて」についてであるが、本校数学科の課題の原因の一つに、話し手側の指導はしてきたが、聞き手側の指導が軽視されてきたことがあるのではないかと考えた。つまり、自分の考えをうまく発表したり伝えたりする指導はしてきたが、相手の考えを聞く側の指導に改善の余地があるのではないかと考えた。聞く側の指導を充実させれば、考えを伝えるだけの一歩通行で終わってしまわず、その考えについて対話が生まれる双方向の話し合いになるのではないかと考えたのである。そこで、本校数学科では、生徒が友達の考えを聞くときに、次のような観点で聞かせ、それを相手に伝えさせるようにした。

- (1) 良い点はどこか
- (2) 疑問点はどこか
- (3) 改善点はどこか

(1)は、話し手に考え方を受け入れたことを示すための観点である。(2)は、話し手の考えを理解し、さらに十分に理解したことを示すための観点である。(3)は、話し手にアドバイスを示す観点である。

二つ目の「より効果的な話し合いをさせるための課題」についてであるが、本校数学科では、生徒達が話し合う意義や意味をより感じるような課題として、昨年度から継続的に以下の4つの課題を設け、「数学的な表現力」の育成に努めてきた。

- (1) 多様な解法が考えられる課題
- (2) 一つの課題を解決するのに、いくつかの数学的な知識・技能、見方・考え方を組み合わせる課題
- (3) 問題をつくり、互いに解き合う課題
- (4) 誤答が出やすい課題

3 公開授業

公開授業Ⅰでは、田中真也教諭が「文字と式」の単元の「数量の大小関係を表す式」で、「当選確実な票数は？」という題目で授業を行った。この授業は、「誤答が出やすい課題」を与える授業である。公開授業Ⅱでは、増渕正人教諭が「式の計算」の単元の「式の利用」で、「3数の和の特徴を考えよう」という題目で授業を行った。この授業は、「一つの課題を解決するのに、いくつかの数学的な知識・技能、見方・考え方を組み合わせる課題」を与える授業である。本稿では、公開授業Ⅰの「誤答が出やすい課題」を与える授業について説明する。

【問題場面】

真一さんの学級では、学級委員2人を次のような選挙で決めています。

- ・学級全員が立候補者の中から1人を選んで投票する。
- ・立候補者も投票する。(自分自身に投票するとは限らない。)
- ・得票数の多い順に、2名当選する。
- ・2位と3位が同じ得票数になった場合は、くじ引きで決める。

真一さんの学級の生徒数は40人で、この選挙に真一さんを含めて4人が立候補しました。真一さんは、1人を選ぶのに2人立候補したときに、当選を確実にするには最低でも過半数の票が必要となるのだから、2人を選ぶのに4人立候補する場合も少なくとも過半数の票を集める必要があると考えています。

【課題1】 真一さんの考えは、正しいのか。

【課題2】 2人を選ぶのに4人立候補した場合、40人が立候補者1人を選んで投票したとすると、当選が確実になるのには、最低何票必要だろうか。

【課題3】 投票者全体の数を a 、当選者数を b 、当選確実の票数を x とすると、これらの数量関係はどのような式で表すことができるだろうか。

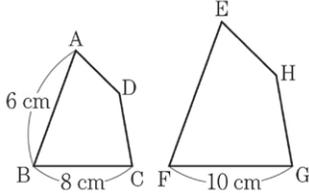
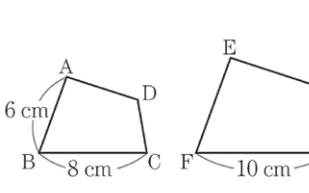
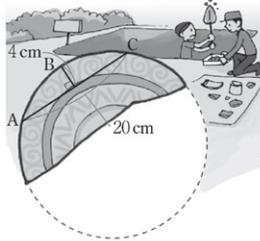
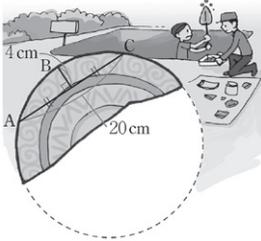
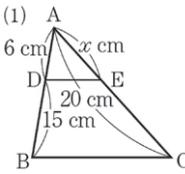
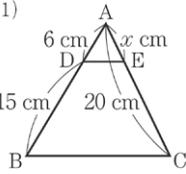
この授業は「誤答が出やすい課題」を与える授業である。入学して間もない1年生であるため、相手の考えを批判的に見てその誤りや不足している点を指摘することは、まだ難しいと考える。さらに、自分の考えの誤りを指摘され、それを素直に受け入れられる素地があるかという疑問が残る。そこで、本時ではあえて問題場面に登場する真一さんが誤った考えをもっている場面を与え、その誤りを、根拠をもって指摘したり反論したりするような活動をさせた。また、班で話し合う活動では、機械的につくった4人班で課題解決をさせる。生徒達にとって解決が容易でない課題であるため、話し合いを通して班で力を合わせて解決させることとした。この場面では、それぞれの生徒が考えを伝える側になったり、相手の考えを聞く側になったりするのだが、話し合いに入る前に、そのことを意識させたり、聞く側になったときの着眼点(①意見をきちんと聞いていることを伝えながら聞く、②自分の意見と相手の意見を比較しながら聞く、③相手の意見が正しいかを検討しながら聞く)を与えた。このようにすることで、話し合いがより活発になり、考えを伝える側になったときには、自分の考えを伝えるために、その表現をいろいろ工夫するのではないかと考えた。

今後もこれらの授業実践を重ね、効果的な話し合いをさせるための手だてと課題について考察をし、数学的な表現力をはぐくんでいきたい。

編集部からのお知らせとお願い – 平成 24 年度用教科書について

平成 24 年度用教科書につきまして、下記のような誤りがございました。

誠に恐縮に存じますが、内容をご確認いただき、ご訂正のうえ、ご指導賜りますようお願い申し上げます。

| 訂正内容 | | | | |
|------|---------|----------------------|---|--|
| 学年 | ページ | 行 | 原文 | 訂正文 |
| 1 年 | 82 | 25 行 | 不等式の左側の部分 | 不等号の左側の部分 |
| | 243 | 3 行 | ヒストグラム | 度数分布表 |
| | 262 | 右段 28 行 | (4) $(-56) \div (-9)$ | (4) $(-54) \div (-9)$ |
| 2 年 | 39 | 17 ~ 18 行 | ㊦ $x = 2, y = 3$ ㊧ $x = -2, y = 3$ ㊨ $x = -2, y = -3$ ㊩ $x = 2, y = -3$ | ㊦ $x = -1, y = 2$ ㊧ $x = -4, y = 1$ ㊨ $x = 6, y = 11$ ㊩ $x = 2, y = -3$ |
| | 211 | 右段 26 ~ 27 行 | ㊦ $x = 3, y = 4$ ㊧ $x = -3, y = 4$ ㊨ $x = 3, y = -4$ ㊩ $x = -3, y = -4$ | ㊦ $x = 5, y = -1$ ㊧ $x = 1, y = 6$ ㊨ $x = 3, y = -4$ ㊩ $x = -2, y = 4$ |
| 3 年 | 127 | 4, 5, 6 行 | 2 倍に拡大した図形 | 2 倍にのばした図形 |
| | 140 | 3 の図 |  |  |
| | 195 | 問 4 の図 |  |  |
| | 237 | 10 (1) の図 | (1)  | (1)  |
| | 250 | 右段 12 行 | 連続する 2 つの奇数 | 2 つの奇数 |
| 253 | 右段 21 行 | およそ 357 ^匹 | およそ 360 ^匹 | |

『数学的文化化—算数・数学教育を文化の立場から眺望する—』

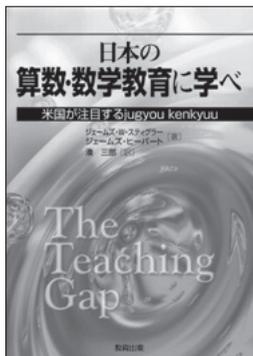
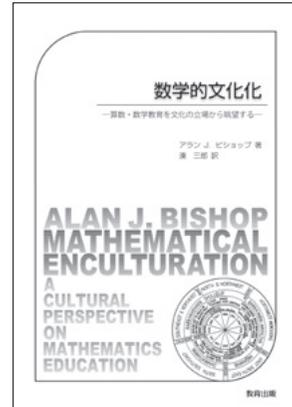
アラン J. ビショップ 著 湊 三郎 訳

定価 4,200 円 (税込)

「数学」と聞くと

身震いが生じる……

数学恐怖症や多数の落ちこぼれを生み出す西欧の数学教育はどこに問題があるのか。アラン・ビショップ氏はこの問題を解き明かし、教師のあるべき姿に貴重な示唆を与える。



『日本の算数・数学教育に学べ』

米国が注目する jugyou kenkyuu

J.W. スティグラール / J. ヒーバート 著 湊 三郎 訳

定価 2,310 円 (税込)

教育改善を目指す米国の研究者たちは、日本の学校教育・教員研修に活路を見いだした！



『数学トレッキングツアー』

東京理科大学数学教育研究所 編 定価 1,890 円 (税込)

『数学トレッキングツアー 2』

東京理科大学数学教育研究所 編 定価 1,680 円 (税込)

東京理科大学生涯学習センター主催の「数学を楽しむ講座 空間『無限』への招待」での講演内容を再構成。東京理科大学創立 125 周年に合わせて刊行。



【表紙・写真】

大師橋 (東京都大田区・神奈川県川崎市)

多摩川の最下流に架かる橋の一つで、大田区と川崎市を結んでいる。壮大かつ優美な印象を与える斜張橋で、平成18年に完成した。なお、橋の名前は、近くにある川崎大師に由来する。



中学数学通信 coMpass (2012年 秋号) 2012年10月1日 発行

編集：教育出版株式会社編集局
印刷：大日本印刷株式会社

発行：教育出版株式会社 代表者：小林一光
発行所：教育出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町2-10 電話 03-3238-6864 (お問い合わせ)
URL <http://www.kyoiku-shuppan.co.jp>



なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は、科学技術の進展や国際化、情報化、高齢化などによって、今、大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で、人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには、人や自然を大切にしながら、共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは、この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め、社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

- 北海道支社 〒060-0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445 FAX: 011-231-3509
- 函館営業所 〒040-0011 函館市本町6-7 函館第一生命ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886 FAX: 0138-31-0198
- 東北支社 〒980-0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391 FAX: 022-227-0395
- 中部支社 〒460-0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821 FAX: 052-262-0825
- 関西支社 〒541-0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221 FAX: 06-6261-9401
- 中国支社 〒730-0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033 FAX: 082-249-6040
- 四国支社 〒790-0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193 FAX: 089-943-7134
- 九州支社 〒810-0001 福岡市中央区天神2-8-49 ヒューリック福岡ビル 8F
TEL: 092-781-2861 FAX: 092-781-2863
- 沖縄営業所 〒901-0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411 FAX: 098-859-1411