

教育出版

coMpass

[中学数学通信] 2013年・秋号

目	次]
---	----

3

推論する力を養う学習指導

- ●実践例 帰納的・類比的・演繹的推論の3つの推論を経験する学習指導
 - ・・・・・・・・加藤 隆司 6
- 推論の比較と推論する視点の明確化・・・・・・ 小石沢 勝之 ●実践例 9

連載

- 数学的活動へのイノベーション ・・・・・・・・・・ 吉野 茂 12
- 編集部からのお知らせとお願い ・・・・ 15

まもなく締め切り!!

回入選作品

球となかよしメッセージ

作品募集(2013年度)

「地球となかよし」という言葉から感じたり、考えたりしたことを、 写真 (またはイラスト) にメッセージをつけて表現してください。



田んぼパワ

田んぽはね苗を植える場所なのに

カイエビ、ミジンコ、イトミミズ いろんな生きもの生まれてる 田んぽはね稲を育てる場所なのに

いろんな生きもの育ってる 田んぼはね稲穂を刈り取る場所なのに

オンブバッタ,トンボ,チョウ いろんな生きもの恋してる 田んぽはね何にもしてない時にでも

アメリカザリガニ, ドジョウ, ヘビ いろんな生きもの休んでる 田んぽはねお米という命が実る場所だから

サギ, コオイムシ, レンゲソウ いろんな命がつながって アメンボ, スズメ, 私たち 田んぽパワーで元気いっぱい

応募資格 小学生・中学生(数名のグループ単位での応募も可)

2013年7月1日~9月30日

応募期間 詳細は「優秀作品展示室」とあわせてホームページをご覧下さい。

①身のまわりの自然が壊されている状況を見て感じたことや、自然環境

や生き物を守るための取り組み 作品 ②さまざまな人との出会いを通して, 友好の輪を広げた体験, 異文化交 流、国際理解に関すること

③その他,「地球となかよし」という言葉から感じたり,考えたりしたこと

◎主催/教育出版 ◎協賛/日本環境教育学会

◎後援/環境省, 日本環境協会, 全国小中学校環境教育研究会, 毎日新聞社, 毎日小学生新聞 *協替·後援団体は昨年実績で、継続申請中です。

応募の決まりなど詳しくはホームページを見てね

http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/



応募者全員に 参加賞が

もらえるよ

・・・・・・特 🛊 推論する力を養う学習指導

3つの推論の特徴と 指導のポイント

京極 邦明

[福岡教育大学教職大学院教授]

1 数学的推論

中学校数学科で用いられる推論には、主に帰納的推論(以後、帰納)、類比的推論(以後、類推)、演繹的推論(以後、演繹)の3つがある。帰納や類推は、数や図形の性質、それに関わるきまり等を見いだすために重要な役割を果たすが、帰納や類推によって見いだされた命題は、必ずしも真であるとは限らない。それが真であるかどうかを確かめるのは、演繹による。本稿では、これらの特徴を踏まえた推論の指導のポイントを、教材と絡めて明らかにしていきたい。

2 帰納について

(1) 帰納の意味

帰納とは、通常、一般化によって、特殊な場合に成り立つことを基に、それらに共通な一般的な概念や法則や手順を導きだすことである。帰納することによって、次の例にみられるような規則、性質、定理等を推論する。これらの真偽については、演繹等による判断を要することは、おさえておきたい。

(2) 帰納が働く場面

例1 正・負の数の加法で、

$$(+2) + (+3) = +(2+3)$$

$$(-4) + (-7) = -(4+7)$$

などを基に、「同符号の2数の和は、2数の 絶対値の和に、共通な符号をつける」のよ うな計算の規則を帰納する。[1年]

例2 四角形の内角の和が $180^\circ \times 2$, 五角形の内角の和が $180^\circ \times 3$, 六角形の内角の和が $180^\circ \times 4$, …であることから, n 角形の内角の和が $180^\circ \times (n-2)$ であるという多角形の性質を帰納する。 [24]

例3 中心角がたとえば、90°のとき、いくつかの円周角の大きさを測定し、円周角の定理を帰納する。〔3年〕

(3) 帰納についての指導のポイント

それぞれの場面での指導において、帰納という用語を用いることはしないが、「個々の事実からそれらに共通な性質や定理を導いた」という帰納の特徴を明確にしておきたい。同時に「その性質等が必ずしも真であるとは限らない」ということも、確認させる必要がある。たとえば、n を自然数としたとき、 n^2-n+41 は 41, 43, 47, …のような素数になる。これらのことから、「n が自然数のとき、 n^2-n+41 は素数である」と帰納することができるが、この命題は偽である。n が 41 のとき、 n^2-n+41 は 41^2 となり、これは素数でないからである。

帰納したことの真偽を吟味することは中 学校数学の内容にきちんと位置づけられて いないが、このことは2年の論証指導に入 る前に指導しておきたい。

3 類推について

(1) 類推の意味

『中学校学習指導要領解説 数学編』によれば、類推とは「似たような条件のもとでは、似たような結果が成り立つであろうと考えて、新しい命題を予想する推論である。」とされている。形式化すると、「A、Bこつの事物があって、A、Bともに性質a, b をもっているとする。Aがさらにc という性質をもっているとき、Bもまたc という性質をもつと結論すること」とまとめることができる。たとえば、長方形の辺の性質をもつと結論すること」とまとめることができる。たとえば、長方形の辺のである。である。

(2) 類推が働く場面

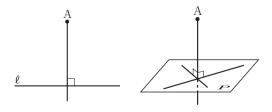
① 数から式への類推

例1 $6 = 2 \times 3$ のように、整数がいくつかの整数の積で表されるとき、その1つ1つの数をもとの数の因数という。このことから、 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ のとき、整数の場合と同じように、x + 3、x - 3を $x^2 - 9$ の因数と類推する。[3年]

例2 (多項式)÷(単項式)の計算では、 (多項式)÷(数)の場合と同じように計算する。たとえば、 $(6x^2-9x)\div 3x$ の計算の仕方を、 $(6x^2-9x)\div 3=\frac{6x^2}{3}-\frac{9x}{3}$ という計算の仕方から類推する。[3年]

② 2次元から3次元への類推

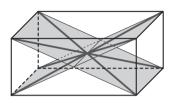
例3 「点Aと直線 ℓ との距離」を基に、 点Aと平面Pとの距離 |を類推する。〔1年〕



|例4| 長方形の対角線の長さが等しいことから、直方体の対角線の長さが等しいことを類推する。[3年]

(3) 類推についての指導のポイント

例4について考えてみたい。ここでは、計量に入る前に、長方形の対角線について振り返りながら、見取図に直方体の対角線をひかせる活動をさせたい。1本だけひいて終わりにする生徒も多いだろう。



しかし、立体にすると4本ひくことができるというのがここでの勘所である。これは、立体にすると長方形が2つできて、それぞれ2本の対角線がひけることによる。ここで、この4本は等長ということは長方形の対角線から類推することができ、真なのである。このように、平面図形の性質から類推して、立体としての特徴を明確にしていくことができるという面白さを味わわせる指導を、このような場面において展開したい。

(4) 誤った類推の例

類推は次のような場合にも起こる。錐体の体積の求め方を考える際、「三角形の面積はそれに外接する長方形の面積の $\frac{1}{2}$ になるから、角錐の体積もそれに外接する直方体の体積の $\frac{1}{2}$ になる」と推論するのは、類推によると思われる。[14]

しかし、この類推は真の命題を導かない。 こうしたことも視野に入れて数学の内容の 指導に絡めて、推論の特徴に関しても指導 をすることが必要かつ有効である。

4 演繹について

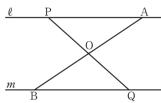
(1) 演繹の意義

演繹は一般的な概念,法則,手順などを特殊な場合に適用することである。帰納により導かれた「すべて三角形の内角の和は180°である」ということを確かめるには、平行線の性質などを根拠とした演繹が必要である。

(2) 演繹と証明

証明を学習する意義は他者への説得ということもあるが、その前に自分自身(自己の中の他者)への説得を行うことにもある。このことを次の例でみてみよう。

次の図で、 $\ell //m$ とし、線分 AB の中点を O とする。このとき、AP = BQ を証明することができる。



その根拠は次に示す4つの命題であり、この証明では、演繹が4度行われる。ここでは、一般にあたるのが各命題としたとき、特殊にあたるものに注目して証明をみていこう。

命題1 2つの直線に1つの直線が交わる とき,2直線が平行ならば錯角は等 しい。(一般1)

命題2 対頂角は等しい。(一般2)

命題3 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。(一般3)

命題4 合同な図形の対応する辺の長さは それぞれ等しい。(一般4)

<証明> △ APO と△ BQO で

 $\begin{cases} AO = BO (仮定) \\ \angle PAO = \angle QBO (一般1からの特殊1) \\ \angle AOP = \angle BOQ (一般2からの特殊2) \\ -般3より、<math>\triangle APO \equiv \triangle BQO (特殊3) \\ -般4より、AP = BQ (特殊4) \end{cases}$

証明はこのような演繹により成立する。

(3) 演繹が働く場面

演繹などというと、高級な思考で中学生には縁遠いように思われがちであるが、証明に限らず、以下の例にみられるように、演繹が働く場面は多い。

例1 等式の性質を使って,

方程式x-1=-5をx=-5+1と変形

する。この場合の一般にあたるのは $\lceil A = B \text{ c}$ ならば、 $A + C = B + C \rceil$ という 等式の性質で、特殊にあたるのが、A = x - 1、B = -5、C = 1 とみて、A + C = x - 1 + 1、B + C = -5 + 1 とし、x = -5 + 1 を導くことである。 $\lceil 1 \text{ c} \rceil$ 直方体 $\lceil ABCD - EFGH \rceil$ で、 $\lceil AE \rfloor$ ることである。 $\lceil AE \rceil$

であることを,直線と平面が垂直であることから演繹する。[1年]

例3 分配注則を基に 1次式と数の積を

例3 分配法則を基に、1次式と数の積を求める。 $5(2a+3)=5\times 2a+5\times 3$ [2年] 例4 平行四辺形の対角線の長さが等しいことから、長方形の対角線の長さが等しいことを演繹する。[2年]

例 5 展開公式 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x$ + ab を基に、展開公式 $(x+a)^2 = x^2 + 2ax$ + a^2 を演繹する。[3年]

(4) 演繹についての指導のポイント

生徒は $\boxed{M3}$ が理解できても、 $\boxed{M4}$ や $\boxed{M5}$ はそう簡単に理解できない。これらを理解するためには、 $\boxed{M1}$ の説明にあるように、場面ごとに「一般と特殊があって」、「一般にあたるのは \bigcirc 〇、特殊にあたるのが \blacktriangle 」というような確認を、丁寧に積み重ねていくことが必要であろう。こうした取り組みが、自分自身への説得の材料として働き、他者への説得に繋がるのである。説得するときに根拠になるのは、このような演繹である。

5 まとめ

以上述べてきたように、帰納や類推は数学を生み出すために、演繹はそれらの正しさを保障するために必要で有効な推論である。このことの理解を深めるため、例示したような場面での推論の指導を、そこで用いられている教材の特徴とともに踏まえて、カリキュラムに適切に位置づけて行う必要がある。

・・・・・・特 集 推論する力を養う学習指導

実践例

帰納的・類比的・演繹的推論の3つの推論を経験する学習指導

加藤 隆司 [北海道江別市立大麻中学校教諭]

1 はじめに

数学的な推論は、帰納的推論、類比的推 論、演繹的推論の3つの推論があり、これ らは中学校数学科だけでなく, 小学校算数 科から学習してきている。ただ、生徒たち が「これが帰納的推論(帰納的な考え方) である」などと、数学的な推論について、 はっきりと認識しているかといえば、それ ほどではないように個人的には感じていた。 また.「数学的な推論の力は、図形の証明 の学習を通して身につける」というような 意識が、 周りの数学教師や生徒たちにも多 いように感じている。『中学校学習指導要 領解説 数学編』でも、推論については「三 角形の内角の和は180°である」など、図形 の性質にかかわってクローズアップし. 語 られることが多い。このことからも、「数 学的な推論の力は図形の学習でしという意 識を強めているように感じる。

私自身もその一人ではあったが、他の場面でもできないのかと意識を向けたことで、日常の授業でも「数学的に推論する力」を伸ばすことができると感じられた。むしろ日常的にその意識を持ち、授業を展開していくことが必要なのだと最近はさらに感じている。そこで本稿では、日常の授業の展開で意識していることをその実践例とともに紹介したい。

2 日常の授業で意識していること

『中学校学習指導要領解説 数学編』には. 「帰納や類推により予想したことを演繹に よって確かめることは、内容の理解を深め るとともに、知識を関連付け、さらに体系 化することにも役立つ。また、それぞれの 推論は、目的に応じて適切に選んで用いら れるべきであり、演繹を学んだからといっ て. 帰納や類推を軽視することは適切では ない。| とある。数学を学習していく過程で、 新しい知識は関連する既知の知識を使うこ とや関連付けることで獲得していくことが できる。そして、そこに帰納や類推、演繹 の考え方を使うことはとても重要である。 ここで紹介する中学2年の実践例は、生徒 自身が帰納や類推. 演繹の考え方を使って いることを意識できるように工夫したもの である。

(課題)

次の(1)~(3)の和を求めなさい。そして、これらの数や和に「何かヒミツ」はないだろうか。

- $(1) \quad 26 + 62 = \boxed{}$
- $(2) \quad 57 + 75 = \boxed{}$
- (3) 86 + 68 =

(1) 課題の工夫と課題提示の工夫

→「なんで?」「何かないか?」を持つ ことで、帰納的推論、類比的推論を させる。

はじめに数の性質に気づかせたい。「~ となることを説明しなさい」と課題を提示 するのではなく、教科書のQのように生徒 に予想させるが、使う2つの数にも注目さ せ、「何かヒミツはないか?」「何か見つけ よう」という意識を持たせる。

生徒はまずは2つの数の和を計算し、(1) は88、(2)は132、(3)は154と求め、「何かないか?」と考え始める。大半の生徒は「2桁の数の和」「2桁の数と、その数の一の位の数と十の位の数を入れかえた数の和」であることには気づく。(1)~(3)の計算例から、帰納的に考え、気づくこととなる。同時に、和には「何かないか?」を考えるが、すぐに11の倍数になることに気づく生徒は多くはない。そこで、生徒とのやりとりのなかで、

T:答えにはどんなヒミツがありそう か?

S: この3つだけではまだわかりにく い。

T: 同じ条件で他の場合はどうなるの か?

と投げかけ、答えについても同様に帰納的に考えていくようにさせる。このとき、17 + 71 = 88 のように、答えが2桁になる場合をいくつか並べると、帰納的に考えやすく、「11 の倍数」であることに気づいていくだろう。また、39 + 93 = 132 のように、答えが3桁になる場合をいくつか並べると、「答えが2桁の場合と同じように11 の倍数

<u>になるのか(なるのではないか)」と類比</u> 的に考えることにもなる。

このようにいくつかの例をもとに、「ヒミツは?」としたなかで、帰納的・類比的に考えることを経験することができる。

(2) 生徒とのやりとりの工夫

→ 「いつでも?」と投げかけることで, 演繹的推論をさせる

帰納的・類比的に考え,「ヒミツ」を発見することができた後に,「今, 挙げられたこれらの場合のほか, どんな場合でも・いつでもいえるのか」と投げかけ, 一気に演繹的な考えをさせるのではなく, あえて次のような生徒とのやりとりを入れる。

T: じゃあ, この場合は? (別の例を 挙げる)

S: その答えも11の倍数になる。

T: じゃあ, これは…

S: それも…

T: どうすれば、すべての場合を確認 することになる?

S: 文字を使って説明するといい。

このような生徒とのやりとりは、帰納的・ 類比的に考えたことは予想であり、いつで もいえるのかを示していることにはなって いないのだということを確認させる作業 = これまで考えてきたことは帰納的・類比的 な考えで、これからは演繹的な考えとな る、いわば "スイッチ" のような役割となる。 このような生徒とのやりとりをすることで、 それぞれの場面で考えてきたことは、それ ぞれ意味があることであったり、帰納的・ 類比的な考えをもとに、最終的には演繹的 な考え方が必ず必要になってくるという一 連の流れを経験させていきたい。

た課題の例

[例 1]

次の(1)~(3)の積を求めなさい。そし て. これらの数や積に「何かヒミツ」 はないだろうか。

- (1) $34 \times 36 =$
- $(2) \quad 58 \times 52 =$
- (3) $63 \times 67 =$

[例2]

次の(1)~(4)の積を求めなさい。そし て、これらの数や積に「何かヒミツ」 はないだろうか。

- (1) $12 \times 84 = 6$
- $(2) 48 \times 21 =$
- (3) $36 \times 42 = 1$
- $(4) \quad 24 \times 63 = 1$

〔例3〕

次の(1)~(3)の差を求めなさい。そし て、これらの数や差に「何かヒミツ」 はないだろうか。

- (1) 362 263 =
- $(2) \quad 685 586 =$
- (3) 735 537 =

どの課題例でも前述のような展開と"ス イッチ"を入れることができ、帰納的・類 比的・演繹的推論が行われることとなる。

また、上の**〔例3〕**では、差の数を使っ て次のように発展させることもできる。

① 差の数について、一の位の数と百の位 の数を入れかえた数を考える。

3 帰納的・類比的推論を育てるのに適し
② 差の数と①で入れかえた数の和を求め る。

> この計算の結果はどれも 1089 になる。こ れは、生徒の「なんで? | 「いつでも? | を 大いに感じさせることができる。演繹的に 確かめようとするときには、かなりの「難 問」となるが、どんな3桁の数でも「いつ でも 1089 になる | ので、文字を使って「い つでもなる」を確かめたくなる「良問」で もあり、中学3年では必ず課題に使っている。

4 おわりに

「数学的な推論の力は、図形の証明の学 習を通して身につける」というような意識 は. 今はまったく持っていない。むしろ、「数 学的な推論の力は、日常の学習を通して身 につける | ことができると、図形の性質や 数の性質を取り上げる場合だけでなく、日 常的に意識したい。「何かないか? | 「なん で? | と予想できるような課題の工夫. そ の予想したことは「いつでもいえるのか? | と確かめることへつなげていく"スイッ チ". これらをそのときだけ…とならない よう. 中学1年のときからより多くの場面 で意識的に経験していくようにしたい。

教師がこのような意識をし、 適切な課題 と展開の工夫を意図的に仕組んでいけば. 生徒にとっては「数学的な推論」をより多 く経験することができ、その力をしっかり 身につけることができると考えている。

・・・・・特 集 推論する力を養う学習指導・・

実践例

推論の比較と 推論する視点の明確化

小石沢 勝之

[筑波大学附属中学校教諭]

1 はじめに

数学的な推論を学習することの重要性に ついては、従来から学習指導要領の数学科 の目標に記述されており、現行課程におい ても「事象を数理的に考察し表現する能力 を高める」ことを中心にその指導が行われ でいると考えられる。加えて、第2学年の 目標に「図形の性質の考察における数学的 な推論の必要性と意味及びその方法を選う」 とあるように図形領域を中心に様々な工夫 が図られている。一方で、図形領域でのみ 推論書などの題材を活かしながら各領域で その指導を行うことが期待されている。

本稿では、中学校3年間を通して推論(帰納的推論,類比的推論,演繹的推論)する力を養うための視点となる内容を、生徒の推論に対する理解状況について大規模調査を基に概観し、いくつかの事例を挙げながら検討したい。

2 全国学力・学習状況調査に基づく生徒 の実態

平成21年度調査A®では、「実測や操作など帰納的な方法による説明と演繹的な推論による証明の違いに着目して、証明の意義を理解しているかどうかをみる」問題が出題された。正答率は29.7%、帰納的推論と演繹的推論による違いを理解できていな

い生徒が22.9%, 帰納的推論の限界について理解できていない生徒が32.6%, 帰納的推論により一般的に証明したと考える生徒が累計で63.4%であった。また, B4 で出題された記述式の証明問題を正答した生徒のうちの63.1%がA8 を誤答しており, 正しく証明することができる一方で, 帰納的推論と演繹的推論の違いが理解できていない現状がある。

平成20,22,24年度調査B②では,「発展的に考え,予想した事柄を説明する」問題が出題されている。記述式ではあるが,正答率は49.2%,59.0%,57.0%となっており,類比的推論によって条件の一部を変えて新たな命題をつくることは,生徒にとって比較的取り組みやすいとも考えられる。

このような状況から,推論する力を養う ためにどのような授業実践が考えられるか, 教科書の題材を基に検討する。

3 授業実践に当たって

(1) 帰納的推論と演繹的推論を比較する

帰納的推論は個々の具体的な事象を調べることにより、数量や図形の性質・関係を推測する際に大きな役割を果たすものであるが、その推測が正しいことは演繹的推論によって確認される。したがって、帰納的推論、演繹的推論を個々に扱うのではなく、両者を比較する場面を通して、帰納的推論の限界や演繹的推論のよさを実感させるこ

とが必要になる。

【教科書「中学数学 3」p.35】

例題1 整数の性質の証明

連続する2つの偶数の積に1を加えると奇数の2乗になる。このことを 証明してみよう。

(調) 連続する2つの偶数の積に1を加えると、どのような奇数の2乗になるか 例題1の証明を読み直して答えなさい。

(副2) 連続する2つの奇数の様に1を加えると、どのような数になるかを予想しなさい。 また、そのことが正しいことを証明しなさい。

問題:連続する2つの奇数の積に1を加 えると、どんな数になるか。

発問:具体的な数で考えてみよう。

 $1 \times 3 + 1 = 4$ $3 \times 5 + 1 = 16$ $5 \times 7 + 1 = 36$ $7 \times 9 + 1 = 64$

授業では、偶数、4の倍数、平方数など を予想する生徒が多数であった。

発問:いくつか予想が出ましたが、その 予想が正しいことを説明するため にはどうすればいいでしょうか。

中学3年生になると、文字式で証明すればよいことを指摘する生徒も多くなる。その際、具体的な数を調べただけの場合の記述を教師側から提示して、なぜ証明したことにならないかを確認する機会をつくりたい。

発問:次のように記述した場合は,証明 したといえるでしょうか。

いくつかの場合を計算すると.

$$1 \times 3 + 1 = 4$$
 $3 \times 5 + 1 = 16$
= 4×1 = 4×4

$$5 \times 7 + 1 = 36$$
 $7 \times 9 + 1 = 64$

$$= 4 \times 9 \qquad = 4 \times 16$$

他の場合も同じように計算できるので、4の倍数である。

具体的な計算だけでは一般的な証明にならないことを確認する場面を,中学2年の文字式の説明の段階から取り上げ.図形の

証明においても再度取り上げ、帰納的な推 論の限界について理解できるようにするこ とが大切である。全国調査の結果を踏まえ れば、生徒の実態に応じて中学3年以降も 同様に取り上げていくことが大切である。

連続する2つの奇数を2n-1, 2n+1 とした場合の計算結果は $4n^2$ となる。 $4n^2$ を $(2n)^2$ とみれば「2つの奇数の間の偶数の2乗」と考えることができる。結果が $4n^2$ となるために、生徒にとっては4の倍数の方がみえやすく、平方数については半信半疑な場合もある。式をよむことや数学的な表現の吟味などの指導も合わせて振り返って考える機会を設け、帰納的な考えのよさと限界、演繹的推論の役割について理解できるようにしたい。

(2) 類比的推論の視点を明確にする

類比的推論の一つの例として、条件を変えて新たな命題をつくる場合がある。先述の題材では、「連続する2つの<u>奇数</u>の積に1を加えると、その間の偶数の2乗になる」という命題を基にして、「連続する2つの偶数の積に1を加えると、その間の奇数の2乗になる」と推論し、証明する。条件を類比なものに置き換えることで新たな命題をつくり出すことが可能になる。

では、次のような場合はどうだろうか。

発問:「連続する2つの奇数の積に1を加えると、その間の奇数の2乗になる」と「連続する2つの偶数の積に1を加えると、その間の奇数の2乗になる」という2つの命題を合わせると、どのような命題が成り立つと考えられますか。

奇数と偶数について証明したことにより, 整数の範囲に拡張し、次のような命題が生 徒から生まれることを期待している。

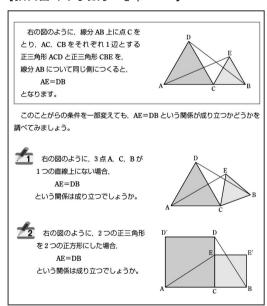
「差が2である整数の積に1を加えると、その間の数の2乗になる。」

「連続する3つの整数について、最も大きい数と最も小さい数の積に1を加えると、真ん中の整数の2乗になる。」

授業では、偶数と奇数から整数に着目して命題をつくろうとしていた生徒がいる一方で、2つの命題を比較して統合するような経験が少ないせいか、どのように2つの命題を統合すべきか戸惑っていた生徒も少なくなかった。

類比的推論においては、どの点において 類比とみなすかという視点が大切になると 思われる。奇数を偶数に変えるように、仮 定の一部に注目して類推する場合は生徒に とって比較的考えやすい。一方で、2つの 命題を統合することは困難かもしれないが、 複数の命題の共通部分を見いだし、類比な 関係にあると考えれば、その命題を含むよ うな一般的な命題をつくることができ、新 しい事実を発見する契機となる。

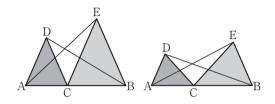
【教科書「中学数学 21 p.172】



AE = DB を証明する題材であるが、3点A, C, Bが一直線上にあってもよいし、そうでなくてもよい。また、正三角形を正方形に変えても成り立つ。これらを基に類推

をして,正三角形の角が重なる場合や正五 角形へと発展的に考える生徒もいると考え られる。

いろいろと自由に類推することは可能であるが,正三角形から二等辺三角形へと条件を変えた場合,成り立つ場合と成り立たない場合がある。



DA = DC, EC = EB の二等辺三角形では成り立たず (左図), CA = CD, CB = CE の二等辺三角形だと成り立つ (右図)。

今までと同様に条件を変えて類推したのに, なぜ成り立たない命題が生まれてしまった のか。それは,この証明の本質に

△ ACE ≡ △ DCB が関わるからである。 2つの三角形の合同が保存されないように 条件を変えた場合、AE = DB は成り立た ない。すなわち、この問題を基に類比的推 論によって新しい事柄を発見しようとする 場合、2つの三角形の合同が保たれること を前提にして条件を変更する必要がある。 「条件を変えてみよう」と発問して類推す る機会を設けるだけでなく、うまくいかな い例を取り上げながら、類比な関係にある のは何かという視点を明らかにする授業の 展開も考えられる。

4 おわりに

本稿では、文字式の証明、図形の証明の2つの題材を基に、推論を養う授業展開について検討した。すべての領域で推論する機会があるので、教科書の題材を再度見直し、普段から意識して授業をすることが大切である。

連載

数学的活動へのイノベーション 「正五角形の作図」いつやるの?

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]

1 はじめに

前回は、学年の進行にあわせた継続的な 作図指導の大切さを述べたが、今回も引き 続き作図に関する課題について考えていこ うと思う。

高校においても、数学 A という科目の中で「作図」を扱うようになり、中学校での学習内容を基にして、「基本的な図形の性質などをいろいろな図形の作図に活用すること」を学習することになっている。

例えば、高校の学習指導要領解説書(数学編)の中で、「正五角形などの作図を扱うことが考えられる」ことが示されているが、この作図はどの教科書でも扱われているわけではないので、すべての高校生が学ぶとは限らない。

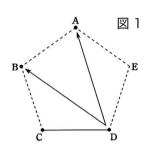
そこで、今回は、義務教育における学び の総仕上げとして、中学生にも「正五角形 の作図」を課題とすることができないか? ということについて考えてみたいと思う。

2 何がわかれば作図できるのか?

まず、1辺の長さがわかっている場合の正五角形について考えてみよう。

図1のように、作図したい正五角形の頂点をA,B,C,D,Eとし、そのうちの1辺CDからスタートするとして、次にどの点を作図すればよいかを考える。

結論としては, 残りの3点のどれ であっても,正五 角形を作図するこ とはできる。また, どの点を選んだと しても,それは正



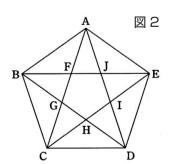
五角形の対角線の長さを決定することに帰着する。作図するにあたって、このことを 理解しておくことは、大切な活動であると いえよう。

3 対角線の長さを求めるには?

次に、対角線の長さはどのようにすれば 求められるのかを考えることになるが、こ れについては、ほとんどの検定教科書にお いて、「自由研究」や「課題学習」の頁で「黄 金比」の紹介とともに取り上げられている ので、それらを参考にするとよいと思う。

ただし、多くの教科書で、対角線を求め

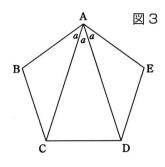
るために必要な 2つの三角形が 予め指定されて しまっているの は残念なことで ある。図2のよ うに、5本の対 角線が引かれた



図の中には、いろいろな相似な図形を見つけることができるので、それらのうちどれを用いて対角線の長さを求めればよいかを考えることも、大切な活動だと思うからだ。

また,この課題解決を通して,思わぬ副 産物に出会うこともある。それまでの学習

経験がどうなっ なのかにの なるが、図3本の対角線によっ 対角線によっ 1つの内るこっ 生徒によって 生徒によって

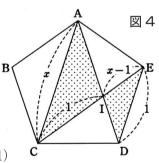


とても新鮮な事実として受け止める場合が ある。

これは、正五角形に限らず、すべての正 多角形についていえることであり、円周角 の定理の学習後であれば簡単に確認するこ とができる事項であるが、それまでの間は 不思議な性質の1つであるので、必要に応 じて丁寧に指導することも大切である。

さて、本論に戻って対角線の長さについ て確認しよう。例えば、図4で、△ACIと

△ DEI が 相 似であること に注目し, 1 辺の長さ 場合 について考え ると.



$$x: 1 = 1: (x-1)$$

 $x : 1 = 1: (x-1)$
 $x^2 - x - 1 = 0$

これを解いて

$$x > 0 \quad \text{in} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{bising}$$

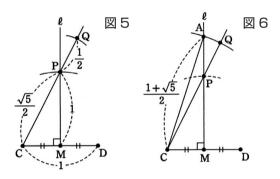
中学校3年の検定教科書では,正五角形を黄金比の紹介の題材として扱っているだけなので,ここで話が終わっているが,本

稿では、正五角形の作図を目標として対角 線の長さを求めようとしたわけであるから、 ここからがいよいよ本題となる。

4 作図をしてみよう(その1)

長さ1に対して $\frac{1}{2}$ を作図することは、中学校1年の基本の作図で学習済みである。問題は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ であるが、基本は $\sqrt{5}$ の作図である。正式には、三平方の定理の学習を待たなければならない内容であるが、「平方根」の学習で何度か登場している経験をうまく生かせば、それを待たずに、作図する方法も理解できるはずである。

一般には、1辺の長さがわかっている場合の作図は、次の図5と図6がもとになる。

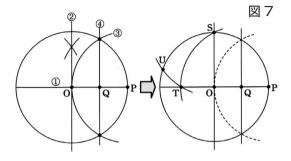


5 作図をしてみよう(その2)

次に,正五角形の外接円の半径がわかっている場合の作図について考えてみよう。この場合の作図も,その方法自体はそれほど難しいものではないが,その証明まで考えるとなると,中学生には難しいものとなる。その理由は,作図に必要な長さの関係が,次の表に示したようになるからである。

1辺の長さ	1	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$
対角線の長さ	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$
外接円の半径	$\frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$	1

外接円の半径から作図する方法は、一般 に図フのように行われる。

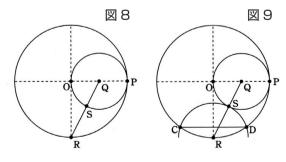


上の図で, 弧 ST は, 中心を Q, 半径 を QS としたものである。また、弧 TU は、 中心を S. 半径を ST としたものである。

このとき、線分 SU (= ST) の長さが、 求めたい正五角形の1辺の長さになるのだ が、その値は、円0の半径を1にとったと きに、前頁の表のようになるので、これを 追究するのは、中学生にとっては、ちょっ とハードルが高すぎるであろう。

そこで、ひと工夫し、1辺の長さを決定 するのに、直接、数値を使って求めなくて もよい作図の方法を考えてみることにする。

まず、1辺の長さを決定するまでの作図 は、図7の左の図の後、次の図8、図9 のように作図を進める。



このとき、線分CDが正五角形の1辺に なるのだが、それはなぜだろうか?

まず、図 10 で、 \triangle ACD $\infty \triangle$ OCR であ ることを確認しよう。正五角形を作図する

には, \triangle ACD を底辺:等辺 = 1: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ という比をもつ二等辺三角形とすればよい わけだから.

図10

△ OCR もそのよ うな比の二等辺 三角形になるよ うに作図すれば よい。

図9において、 OQ=1とすると、

QR = $\sqrt{5}$ となり.

 $SR = \sqrt{5} - 1$ を得る。

よって、図 10 の \triangle OCR において、 $CR: OC = (\sqrt{5} - 1): 2 となるが、この比$ は変形すると、 $1:\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ と一致する。

この比の変形は、うまく誘導する必要が あるが、これならば何とか中学生なりに、 根拠をもって作図することに対して貢献で きるのではないだろうか。

さらに、この作図は円周を五等分する方 法を与えていることにも注目したい。

6 おわりに

現行課程になって、二次方程式の解の公 式が扱えるようになったため、正五角形の 対角線の長さを求める問題が、公立高校の 入試問題にも登場してきている。また、相 似な図形の面積比も扱えるようになったた め、例えば図2の五角形 FGHII の面積な どについても考察することができるように なった。

正五角形を舞台とした課題解決は、まだ まだいろいろ考えられるであろう。それら を、いつやるのか? どこまでやるのか? それはすべて、授業者の工夫次第である。

編集部からのお知らせとお願い - 教師用指導書について

教師用指導書「中学数学1 解説編 I 」につきまして、下記の訂正箇所がございます。 誠に恐縮ではございますが、ご留意のうえ、ご指導くださいますようお願い申しあげます。

訂正内容

学年	ページ	行・箇所	原文	訂正文(訂正内容)
1	解説編 I 215	左段 5~13行目	厚紙の面積の1cm² あたりの実際の面積(風),厚紙の重さの1gあたりの面積(園)から,栃木県の形に切りぬいた厚紙の重さ(⑥)を調べる。そして、	本題材では例えば、厚紙を工作用紙とし、秤の最小表示を 0.5 gと想定した場合、市販の地図帳にある 50 万分の 1 から 100 万分の 1 程度の地図を用いるとよいであろう。長方形の厚紙の実際の面積(\mathbb{A})、長方形の厚紙の重さ(\mathbb{B})、栃木県の形に切りぬいた厚紙の重さ(\mathbb{C})を調べる。そして、 $\mathbb{A} \times \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{B}}$ より、栃木県のおよその面積を求めることができる。

書籍のご紹介

『創造性と論理性を育む図形教材の開発とその指導 -教材のストーリー化-』

坂井裕 著 定価 2,520 円 (本体 2,400 円 + 税)

新刊

図形脳を育む指導法の工夫を やさしく具体的な事例で紹介!

自ら課題を見いだし、自ら解決する力の育成は、今日的な課題であり、それに応えるための有力な題材として図形を取り上げる。新しい性質を見いだすための「意図的な考え」の指導方法を具体的な事例を通して示し、新しい性質どうしのネットワークを創る面白さを実感する図形の指導方法を提言する。



書籍に関するお問合わせ: 教育出版販売部 TEL 03 (3238) 6965





[表紙・写真]

葛西橋 (東京都江東区・江戸川区)

荒川と中川に架かる橋で、1963年(昭和38年)に完成した。緩やかな曲線で構成された美しい橋で、橋の袂からは東京スカイツリーを見ることができる。

中学数学通信 coMpass (2013年 秋号) 2013年8月30日 発行

編 集:教育出版株式会社編集局 印 刷:大日本印刷株式会社 発 行:教育出版株式会社 代表者:小林一光

発行所: 教育出版株式会社

〒101 - 0051 東京都千代田区神田神保町2 - 10 電話 03-3238-6864 (お問い合わせ)

URL http://www.kyoiku-shuppan.co.jp



なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は、科学技術の進展や国際化、情報化、高齢化などによって、今、大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で、人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには、人や自然を大切にしながら、共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは、この理念を「地球となかよし」 というコンセプトワードに込め、社会のさまざ まな場面で人間の成長に貢献していきます。 北海道支社 〒060-0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F TEL: 011-231-3445 FAX: 011-231-3509

函館営業所 〒040-0011 函館市本町6-7 函館第一生命ビルディング3F

TEL: 0138-51-0886 FAX: 0138-31-0198 東北支社 〒980-0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F TEL: 022-227-0391 FAX: 022-227-0395

中部支社 〒460-0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F

TEL: 052-262-0821 FAX: 052-262-0825

関西支社 〒541-0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F TEL: 06-6261-9221 FAX: 06-6261-9401

中国支社 〒730-0051 広島市中区大手町3-7-2

あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F

TEL: 082-249-6033 FAX: 082-249-6040

四国支社 〒790-0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F

TEL: 089-943-7193 FAX: 089-943-7134 九州支社 〒812-0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室

TEL: 092-433-5100 FAX: 092-433-5140 沖縄営業所 〒901-0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F

TEL: 098-859-1411 FAX: 098-859-1411