

coMpass

コンパス

● 定番の教材で
活用力を育てる

coMpass は教育出版が
発行する情報誌です



教育出版

〔目次〕

巻頭言 「説明し伝え合う力」を育むための視点・・・・・・・・・・矢嶋 昭雄 3

特集 定番の教材で活用力を育てる

●実践例 1 導入問題を使って活用のための基礎力を育てる・・大塚 みずほ 4

●実践例 2 図形の証明活動から活用力・言語活動の充実を図る
・・・・・・・・・・佐藤 圭一 7

●実践例 3 身近な数を分析し「正負の数のセンス」を磨く・・・・大野 寛武 10

連載

○数学的活動へのイノベーション・・・・・・・・・・吉野 茂 13

第12回

地球となかよし メッセージ 作品募集 (2014年度)

「地球となかよし」という言葉から感じたり、考えたりしたことを、
写真 (またはイラスト) にメッセージをつけて表現してください。

応募者全員に
参加賞が
もらえるよ!

応募資格	小学生・中学生 (数名のグループ単位での応募も可)
応募期間	2014年7月1日～9月30日 詳細は「優秀作品展示室」とあわせてホームページをご覧ください。
作品 テーマ	①身のまわりの自然が壊されている状況を見て感じたことや、自然環境 や生き物を守るための取り組み ②さまざまな人との出会いを通して、友好の輪を広げた体験、異文化交 流、国際理解に関すること ③その他、「地球となかよし」という言葉から感じたり、考えたりしたこと

◎主催／教育出版 ◎協賛／日本環境教育学会
◎後援／環境省、日本環境協会、全国小中学校環境教育研究会、毎日新聞社、毎日小学生新聞
*協賛・後援団体は昨年実績で、継続申請中です。

応募の決まりなど詳しくはホームページを見てね
<http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

前回
入選作品



ぼくらは、守られている

この写真なんだかわかりますか。これは、ぼくの小学
校の前の道だ。この道には、青とオレンジと白色の三角
のつがった形の変ったものがかかっている。
これは、ソリッドシートという名前のもよう、車を
運転する人には、道がでこぼこしているように見えて、
注意し、ゆっくりと走ってもらうためのものだそう。
ただの落書きではなく、ぼくたちみんなを守るために
えがかれていることがわかった。ぼくらが毎日安全に登
校できるのは、このような変った形のもようのおかげ
なんだなあと思った。
運転手さん、このもようを見たら、ゆっくりやさしく
走ってくださいね。



教育出版

「地球となかよし」事務局

TEL 03-3238-6862 FAX 03-3238-6887
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町 2-10

「説明し伝え合う力」を 育むための視点

矢嶋 昭雄

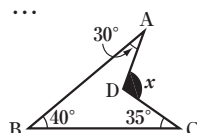
【東京学芸大学准教授】

1 定番の問題が持つ力

Q1：下の図のようにマッチ棒を並べて、正
方形を作ります。10個の正方形を作る
のに必要な本数を求めなさい。



Q2：右の図において、
 $\angle x$ の大きさを求め
なさい。



誰もが一度は実践したことのある定番の
教材であろう。これらは、生徒の多様な考
えを引き出す力を持っている。答えにたどり
着くための道が、いくつも存在するから
である。

答えを確認する場面では、多くの生徒が
自分とは異なる解き方に出会う。ほんの少
し見方を変えることで、全く違うアプロ
ーチができることに気づくのである。

活用力を育てるのに、このような教材を
用いない手はない。活用力というと、「日
常生活や社会で数学を利用する活動」が思
い浮かぶ。もちろん、生徒の身近なところ
で数学の学習を展開することはとても大切
なことであるが、教材開発や準備、授業実
践などに相当の手間や時間が必要となるこ
ともある。

その点、これら定番の問題は、数と式、
図形などの基礎的・基本的な学習内容をす
ぐに適用することができることもあり、生
徒にとって取り組みやすく、教師にとっても
実践しやすいのではないだろうか。

2 説明し伝え合う活動

誰かが発表した解き方が自分のものとは
異なるとき、自分の解き方やなぜそう考
えたのかを振り返ることを大切にしたい。そ
れをもとに、自他の解き方を比べて、どこ

が異なるか、似たところはないかについて
考える場面を取り入れることが重要である。

次に、個々の生徒が気づいたことを皆で
共有するために、説明し伝え合う活動へと
移る。説明する力は、3年間の学習を通し
て身につくものなので、はじめのうちはう
まく説明できない生徒が多いことは言うま
でもない。多くの先生方が実践されている
ように、図を使って「ここがこうなるから
…」などと身振り手振りを交えながら説明
することを認めていくことが大切である。
また、生徒の実態や場面に応じて、ペア、小
グループ、生活班、学級全体など、説明対
象の人数を変えることも有効であろう。

このような説明し伝え合う活動を行う際、
教師として意識しておく必要があるのは、
生徒に「何を説明させようとしているのか」
ということである。

「全国学力・学習状況調査」では、活用
力をみるB問題に「説明する」問題がある。
「解説資料」を見ると「説明する」問題には、
(a) 見いだした事柄や事実を説明する問題
(b) 事柄を調べる方法や手順を説明する問題
(c) 事柄が成り立つ理由を説明する問題
の3種類があることがわかる。この種類に
よって、解答の記述方法も異なる。例えば、
(b)では、「○○を用いて、△△をする。」の形
で、方法や手順を記述することが求められ
ている。

普段の授業の中では、厳密な記述にこだ
わる必要はないが、「説明してみよう」と
問い掛けたときに、「何を説明させようと
しているのか」を上3つに照らして確認
することは欠かせない。その上で、口頭で
なされる生徒の説明を、教師が洗練してい
くことが大切であると思う。

このような継続的な取り組みこそが、活
用力を育むことにつながるのである。

実践例①

導入問題を使って 活用のための基礎力を育てる

大塚 みずほ

【お茶の水女子大学附属中学校教諭】

1 はじめに

「活用力を育てる」と一言で言った場合、何かを活用するための授業場面を積極的に取り入れていかなければいけないと難しく考えてしまう傾向はないだろうか。しかし実際は、数学を学習しているすべての場面において、生徒一人一人が、何らかの形で既習の知識を活用しながら、新しい知識を学習しているはずである。つまり、数学の授業のすべての場面において「活用力を育てる」機会は存在している。大切なことは、日々の授業の中で既習の知識の活用場面で教師がいかに生徒に意識化させるか、また、活用した知識をいかに発展させて新しい知識へと高めていくかではないだろうか。

今回は1次関数の事例を取り上げ、既習の比例の知識を活用して、1次関数の知識へと発展させ、さらにその知識を他の問題場面に活用していくという実践を紹介する。

2 実践のねらい

1次関数の学習は1年生の時に学習した比例の学習の発展であり、比例の学習で身につけた知識を活用しながら新たな知識を習得していく場面が多くある。一方で、変化の割合などの新しい概念を学習し、現実場面から一歩進んだ、より抽象的な視点で関数を取り扱っていくこととなる。

1次関数の活用場面における困難点の一つとして、実際の問題場面と抽象的な概念をつなげて考えることができないということがあげられる。例えば、問題場面での「速さ」と、1次関数の「変化の割合」や「グラフの傾き」などの知識を組み合わせることで考えることができず、その結果、1次関数を問題場面に活用できないという状況がみられる。

本実践では、様々な教科書などで単元の導入で扱われる「水そうの問題」を取り上げる。1分間に水そうに入れる水の量や、もともと水そうに入っている水の量の設定を変えた状況において、まずは表にまとめ、そこから式やグラフにもまとめていく。比例の知識があれば、それを活用しながら、1次関数でも表から式、グラフにまとめることは可能である。その際、比例の知識をどのように活用したか意識させるとともに、設定を変えることによって、式やグラフにどのような違いが生まれたのか、それはなぜなのかを考察させる。

これらの活動を1次関数のはじめに取り入れることにより、1次関数で学ぶべき概念の基礎の多くをここで一通り取り上げることができる。そして、その後の学習においてもくり返し「水そうの問題」に戻ること、実際の問題場面と抽象的な概念をつ

なげて考える基礎を作り上げていくことをめざしている。

3 授業の展開

(1) 単元の導入問題

まずは「空の水そうに1分間に3 cmずつ水位が上昇するように水を入れるときの時間 x 分と水位 y cm」という場面から1年生のときに学習した比例の知識を確認した。そして、次の問題を提示した。

深さ 28 cmの水そうに、一定の量ずつ水を入れていきます。

① 水を入れ始める前、10 cmの高さまで水が入っていました。まずは、この水そうに毎分 3 cmずつ水位が増すように水を入れていきます。

① 水を入れ始めてから x 分後の増加した水位を y cmとする。

② 水を入れ始めてから x 分後の底面からの水位を y cmとする。

そして、①、②について表にまとめ、式を立てることを促した。このとき、①(比例)と②の場面を比較し、表や式の上で共通していることや異なっているところをあげさせた。その際、

- ・表で x が1増えたときに y が3増えるのと同じ
- ・式で x の係数が同じ。
- ・①の表に + 10 したものが②の表になっている。
- ・②の式は比例の式に + 10 されている。

などの意見が出た。そこで、これらの点の原因を問題場面に戻って確認した。

さらに、①の条件を変えた問題②、③を提示し、それぞれの場面における表や式を比較し、問題場面との関連を確認した。

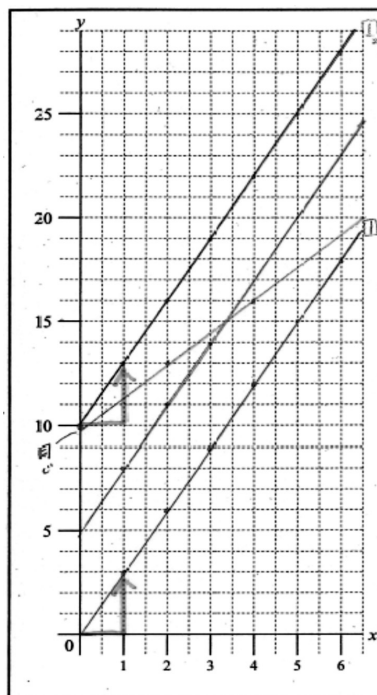
② 水を入れ始める前、10 cmの高さまで水が入っていました。まずは、この水そうに毎分 1.5 cmずつ水位が増すように水を入れていきます。

③ 水を入れ始める前、5 cmの高さまで水が入っていました。まずは、この水そうに毎分 3 cmずつ水位が増すように水を入れていきます。

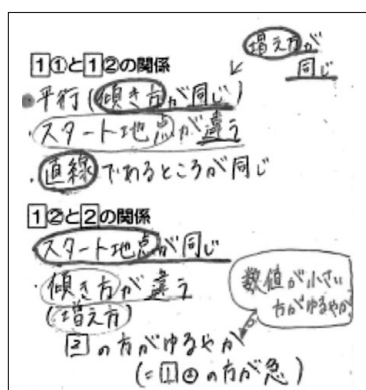
このとき、水を入れ始めてから x 分後の底面からの水位を y cmとする。

①、②、③を比較して、1分間の水位の増加量が x の係数に、水を入れはじめる前の水そうの水位が比例の式にたされている部分に関係していることが確認された。

次に、①①②、②、③について、表や式をもとにしながら、グラフをかく作業を行った。1次関数のグラフを学習する前であっても、比例のグラフの知識を活用することで、グラフが直線になりそうであることがわかり、グラフをかくことができていた。



また、先ほどと同じように、かいたグラフについての比較を行った。下は、生徒の比較の例である。



これらの比較から、グラフの傾き方・増え方が1分間の水位の増加量と、グラフのスタート地点が水を入れはじめる前の水そうの水位と関係していることを確認し、さらにはそれらと式との関係もあらためて確認した。

これらの導入問題を通して、まだ1次関数の概念を学習していない生徒も、表、式、グラフの関係の全体像をつかむことができたようであった。

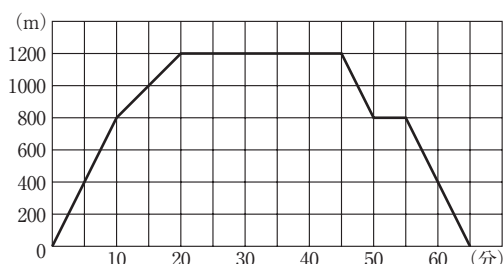
(2) 導入後の展開

「水そうの問題」で確認されたことをもとに、1次関数の基本的な用語などの概念を確認していった。特にグラフについては、「水そうの問題」でのグラフの傾き方・増え方、グラフのスタート地点などの言葉とグラフの「傾き」や「切片」といった概念を丁寧につなげていくことを意識した。くり返し、実際の問題場面とグラフの「傾き」や「切片」などの概念とをつなげて考えることを促すことで、他の問題場面にもその考え方を生かせるような基礎作りを行っていった。

1次関数の後半には次の問題場면을提示

し、家を出てからの時間と、家からの距離の関係についてのグラフを示した。

家から1200m離れた書店に本を買いに行きました。帰りは、途中の公園で友達と会い、買ってきた本についてしばらく話してから家に帰りました。



このグラフについて、生徒からは、

- ・グラフの傾きが変わっているところで速さが変化している。
- ・グラフの傾きが変わるとグラフを式に表したときの x の係数が変わるはず。
- ・水そうの問題のときの毎分何cmずつ入れていたかということと、速さの毎分何mずつ進むかということが似ている。

という意見が出された。これらの意見から、グラフを活用して問題場面を理解する見方が、導入の「水そうの問題」から養われてきたことがうかがえた。

4 おわりに

本実践では、導入問題にその都度戻りながら知識を身につけていくことで、活用の基礎力を身につけていくことを目的とした。活用力そのものは単元のどこかで取り立てて取り上げてなかなか育つものではない。だからこそ、単元全体を通して得た知識をどのようなものに活用していくのか、予め考えて単元計画を立てることが重要になるのではないかと思う。

実践例②

図形の証明活動から 活用力・言語活動の充実を図る

佐藤 圭一

〔東京都大田区立蒲田中学校主幹教諭〕

1 はじめに

毎年のことではあるが、図形の領域に入ると、生徒から「図形は苦手！」の声が上ってくる。よくよく聞いてみると、「公式を覚えるのがいや！」「図形をノートに描くのがいや！」などなど。様々に件が上がってくる。確かに、計算問題などはしっかりと取り組んでいる。また、第2学年の角度の問題などは計算問題の延長であるのか良くなる。しかし、証明問題となると何を書けばよいのかわからない。

そこで、本稿では、日々の授業の中で取り組んできた内容を中心に紹介をしていく。

2 授業改善の取り組み

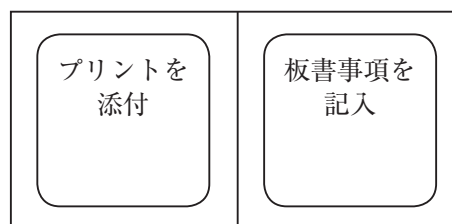
(1) 少人数習熟度別授業を活かす

まず、図形領域が苦手な生徒に共通していえることが、定規を使って直線を引くことが苦手。コンパスを使って円を描くことが苦手。と、道具を使って図形を描くことが苦手な生徒が多いことであった。そこで、小中一貫教育の一つとして、小学校との連携の中で「定規、コンパスの使い方」をテーマに小学校低学年から道具を使って図形を描く練習を繰り返し実践している。その効果が近年現れており、道具の使い方については中学校で指導する場面が少なくなってきた。

(2) ノートの使い方の指導

プリント学習をする際、本校数学科で共通して指導していることは、ノート見開きに対して、プリントを左側に添付し、右側にはプリントには書ききることができない板書事項や追加の問題などを記入することである。このようにすることで、少人数習熟度別授業であっても共通のプリントを配布し、授業ではレベルに合わせて各担当が授業展開を工夫して行うことができる。具体的には、発展クラスであれば、プリントに加え、応用問題を加えたりしている。

<ノート指導>



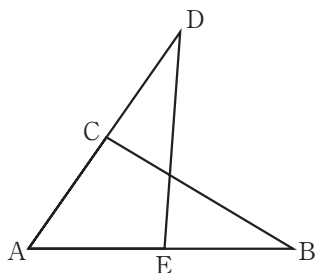
(3) 第2学年の証明の授業での実践

証明の分野は、生徒が苦手としている分野の一つである。毎年、試行錯誤をしながら授業展開を工夫をしている。近年は、図形を描くことが定着してきているので、今年度は、(2)のノートの取り方の指導に加え、次の8点をノートの右側に書く指導を加えた。

- ① まず結論から
→問題文から結論を見だし、ノートに記入させる。
- ② 合同な三角形を見つける。
- ③ 2つの合同な三角形を向きを揃え、並べて描く。
→向きを揃えて描くことにより、対応を意識させる。
- ④ 仮定を抜き書きした三角形に書き加える。
→仮定のみを記入する。
- ⑤ 合同条件を見つける。
→仮定を考慮に入れ、使わない合同条件から考える。
- ⑥ 見つけた合同条件に合うように、等しい辺や角について記入する。
→等しい条件を考えるのではなく、合同条件に合うように考えることを強調する。
- ⑦ 証明パターンに合わせてメモした内容を写す。
- ⑧ 等しい条件をもとの図形から見つける。

<例題>

次の図で、
 $AB = AD$, $\angle ABC = \angle ADE$ ならば、
 $AC = AE$ となる。このことを証明しなさい。



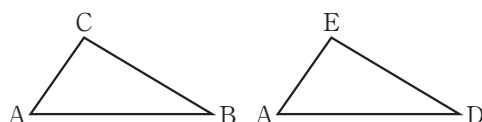
<板書事項例>

仮定 $AB = AD$
 $\angle ABC = \angle ADE$

結論 $AC = AE$

合同な三角形
 $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$

抜き書き



合同条件
「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」
→消去法で考える。この場合、角が等しいことがわかっているから、「3組の辺がそれぞれ等しい」は使うことはない。

等しい角や辺
辺 $AB = AD$
角 $\angle ABC = \angle ADE$
角 $\angle CAB = \angle EAD$
→この場合、等しい条件などを考えず、合同条件に合うように辺や角を考えさせる。

ここまで記入できた段階で、証明パターンに合わせてプリントに証明を記入する。

(4) 授業の中での発問

以上の内容を、はじめは授業内で考えさせながら丁寧に板書していく。その際、少

人数習熟度別授業の特性を活かし、必ず全員に発問するようにしている。また、発問に対する生徒の回答に関しては、必ず「なぜそう考えるのか」と質問し、単なる答えだけではなく、その答えに至った考え方の過程を聞くようにしている。

3 成果と課題

<成果>

まず、成果としてあげることができるのが、小中一貫教育の一つとして取り組んできた道具の使い方の指導である。一貫して取り組むことで、指導方法が共通し、生徒にとっても取り組みやすくなってきている。また、ノート指導を徹底することで、定期試験での白紙解答が減ってきた。さらに授業中「なぜ？」の発問に対して、しっかり答えることができるようになった。

<課題>

課題としては、基本的な問題に対しては十分に対応できるが、応用問題に対して十分に対応することができない。特に、基礎クラスにおいては、一字一句間違えずに記入しなければいけないと考えている生徒が多く、この点を理解させることに難しさを感じている。また、他の分野・領域での言語活動の充実も今後検討していく必要がある。

4 証明活動の広がり

(1) 他教科との連携

言語活動の充実、キャリア教育の視点に立った授業展開を考える上で、実生活の活用例としてスピーチ活動での活用を計画した。スピーチをする上では物事を論理的に考え構築していく必要がある。この点に対しては、数学での証明活動に類似していることに注目をした。

(2) 指導略案

	指導内容	生徒の活動	指導上の留意点
導入	・基本的な証明の流れを確認	・ノートを見ながら確認する。	・具体的な問題を例に説明する。
展開	・実際に問題を解く。	・仮定、結論を明確にし、条件を整理する。	・机間指導により、記入できていない生徒を支援する。
	・話し合い活動における基本の確認 ①テーマの設定 ②結論の設定 ③具体的事例 ④本文の確認 ・代表者による報告発表 ・数学での証明との対比	・国語科における話し合い活動を思い出す。 ・話し合いを進めるための個人メモを記入する。 ・班ごとに代表者を決定し、班での意見をまとめる。 ・代表者が発表する。	・板書により確認。 ・あくまでも作文ではなく、メモであることを強調する。 ・話し合いの時間を有効に使えるよう支援する。
まとめ	・数学での証明の考え方は、話し合い活動、スピーチを作成する上で利用できる。	・基本的な考え方が活用できることを理解する。	・数学では、簡単な事例をもとに繰り返し練習をしていることにすぎないことを確認させる。

都立高等学校の入学検定試験においても推薦入試での集団討論や面接、小論文・作文など、論理的に考え答えなければならない試験が導入されている。数学科においても、考えを論理的にまとめ、発表する活動を計画的に取り入れていく必要があると考える。

実践例③

身近な数を分析し 「正負の数のセンス」を磨く

大野 寛武

〔神奈川県藤沢市立善行中学校校長〕

1 はじめに

従来、正負の数の導入では、身近な場面で使われている例として「温度計」「標高と水深」などが、また、正負の数の演算の場面では「東西の移動」が定番である。ゲームで楽しみながら慣れ親しむように、「すごろく」や「トランプ」が用いられることもある。当たり前のことではあるが、これらすべての定番の特徴は「正しい正負の数のモデル」ということである。教科書などに登場する「正負の数ではないもの」を強いてあげれば、0から始まる小学校の数直線との対比が説明されているくらいのものである。

1年生の最初の授業で「3, 2, 1…次は？」と聞けば「0」,「その次は？」と聞くと「-1, -2」と何の疑いもなく全員が答える。子どもにしてみても、中学校で初めて出会う「数学」の第1章で「正負の数」の勉強をすることに期待と不安を抱きつつ、一生懸命予習などし、「…, 3, 2, 1, 0, -1, -2, …」という固定概念をもって授業に臨んでいるのが現状である。

ところが「負」に拡張された新しい数体系に出会い、特徴を理解し正負の数の概念を獲得していくために、もっと別のアプローチがあるのではないかと思い、今回の題材を提案する。

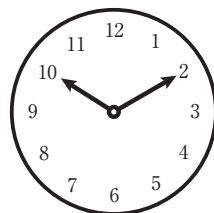
2 導入「いろいろな数の特徴」

先ほどの「3, 2, 1…次は？」に対し「12もあるよ」と言うのと、子どもは「えっ？」とびっくりした反応をする。やがて「何だ、時計だ」と正体に気付くだろう。

そこで「身近にあるいろいろな数の特徴を調べてみよう」という課題となる。つまり、正負の数を理解するために、あえて違う構造の数の分析をさせようということである。本やインターネットで調べないと分からないことも多いので、図書室やパソコン室などで授業を行うことが有効である。

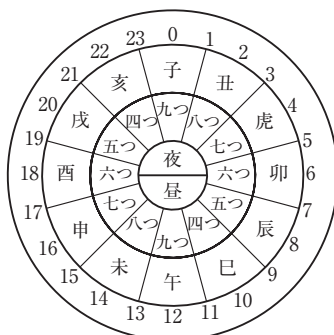
<時計(時計)>

…, 12, 1, 2, 3,
4, 5, 6, 7, 8,
9, 10, 11, 12,
1, 2, …



<江戸時代の刻>

…, 暁九つ, 暁八つ, 暁七つ, 明け六つ,
朝五つ, 朝四つ, 昼九つ, 昼八つ,
夕七つ, 暮れ六つ, 夜五つ, 夜四つ, …



<カレンダーの月>

…, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 1, 2, 3, …

<カレンダーの日>

…, 1, 2, …, 30, 31, 1, 2, …, 27, 28, 1,
2, …

<西暦>

…, 紀元前 3 年, 紀元前 2 年, 紀元前 1 年,
紀元元年, 紀元 2 年, 紀元 3 年, …

<震度 (1996 年 4 月以降)>

0, 1, 2, 3, 4, 5 弱, 5 強, 6 弱, 6 強, 7

<主な地震のマグニチュード>

1923 年 関東大震災 M7.9
1960 年 チリ地震 M9.5 (観測史上最大)
1995 年 阪神・淡路大震災 M7.3
2010 年 チリ地震 M8.8
2011 年 東日本大震災 M9.0

<古代の恒星の等級>

6 等星, 5 等星, 4 等星, 3 等星, 2 等星,
1 等星

<現在の恒星の等級>

北極星 2.0 等星 (旧 2 等星)
プロキオン A 0.40 等星 (旧 1 等星)
リゲル 0.1 等星 (旧 1 等星)
シリウス - 1.5 等星
(旧 1 等星, 最も明るい恒星)
ちなみに太陽は - 26.7 等星

<長さ・道のり>

0 以上で (負がない) 小数などもある

<日本やアメリカの建物の階>

…, 地下 2 階, 地下 1 階, 1 階, 2 階, …

<イギリスやシンガポールの建物の階>

…, B2, B1, GF, 1F, 2F, …
(GF が日本の 1 階, 1F が日本の 2 階)

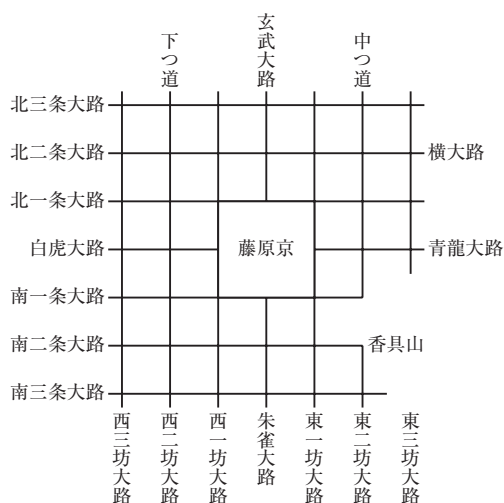
<柔道などの一般的な段位・級位>

10 級, …, 2 級, 1 級, 初段, 2 段, …,
10 段

<条里制>

	一里	二里	三里
一条	一条一里	一条二里	一条三里
二条	二条一里	二条二里	二条三里
三条	三条一里	三条二里	三条三里

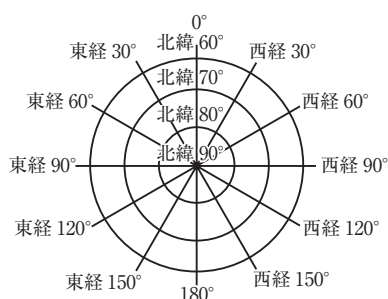
<条坊制 (藤原京)>



<赤道付近の緯度・経度>



<北極付近の緯度・経度>



＜あるホテルの部屋番号＞

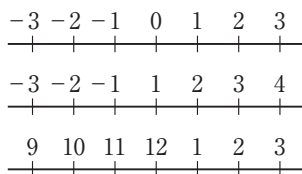
101, 102, 103, 105, 106, 107, 108,
110, 111, 112, …

3 数体系の類比・対比・分類と説明

何気なく普段使っている数を分析すると、「正負の数」以外に実に多くの種類があることが分かる。子どもからも「○○と△△は似ている」「○○と□□は違う」というような意見が出るであろう。そこで「調べた数を比べると何が分かる？」という展開が考えられる。自分なりの視点で特徴を自由に分析させる。特徴が同じ「なかま」や特徴が異なる関係の種類のみを発表させ、「なぜか」という根拠・理由については、他の子どもに説明させると効果的と考える。類比・対比・分類をしたり、他の人の考えを想像したりする体験は、見方や考え方を広げる。また、根拠・理由を考え、説明することは思考を深める。このような取り組みにより、正負の数の確実な理解につながると考える。

＜数を比べて分かることの例＞

- ・「古代の恒星の等級」や「段位・級位」は整数だけである。
- ・数直線が



のように3種類ある。

- ・0があるものと「西暦」「段位・級位」のように0がないものがある。
- ・真ん中から両端に数が大きくなっていくものと、「時計」のように数が増える途中で小さい数に戻るものがある。
- ・「時計（時針）」の数は増えていくが、「江

戸時代の刻」の数は逆に減っていく。

- ・「緯度・経度」のように数字が上下・左右対称になっているものと「時計（時針）」のように対称でないものがある。
- ・「緯度・経度」や「段位・級位」は数の範囲が限られているが、無限に大きくなる場合がある。
- ・「条坊制（藤原京）」は「赤道付近の緯度・経度」に似ているが「条里制」は自然数しかない。

4 発展

緯度・経度の話はこの後の学習で、赤道付近が「直交座標」、北極付近が「極座標」となる。現在の都市で、京都は東西の通りが北から一条、二条、三条、…と自然数型なのに対し、札幌は…、北二条、北一条、大通、南一条、南二条、…と、正負の数型になっている。ちなみに、東京は江戸時代から極座標型の都市である。

正負の数の演算を考えると、異なる数体系の場合と比較することで理解が深まりセンスを磨くことが期待できるので、ぜひ実践を試みていただければと考える。

＜時計算＞（剰余類で考える）

10時の5時間後は何時ですか。

$$10 + 5 = 15 \quad 15 \div 12 = 1 \cdots 3 \quad \text{答} \quad 3 \text{時}$$

＜西暦算＞（0がないので植木算に似る）

紀元前20年生まれで紀元20年の誕生日になった人は何歳ですか。

$$20 - (-20) - 1 = 39 \quad \text{答} \quad 39 \text{歳}$$

[参考文献]

・理科年表 国立天文台編（丸善出版）

数学的活動へのイノベーション

PA×PB を探究する

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]

1 はじめに

学習指導における問題解決において、生徒にとっては不思議な結果に到達することがある。そして、その意味を探っていくことで、また新たな発見に出会うことも多い。「なるほど！すっきりした。」という体験は、さらなる学習への原動力にも繋がり、大切にしたいものである。

今回は、第3学年6章「円」の[ジャンプ]の頁(教 p.182)にある「弦の長さ」を題材として話を進めようと思う。

2 相似な三角形を見つける活動

教科書では、まず、本文の p.174 で、円周角の定理を活用する証明の例題として、図1や図2の中に潜む相似について考察する活動が取り上げられている。この問題では、補助線をひいて「相似な三角形を見つける活動」を大切にしたいところではあるが、教科書ではその性質上、証明すべきことが示されている。

図1

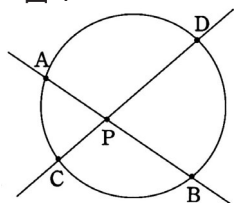


図2

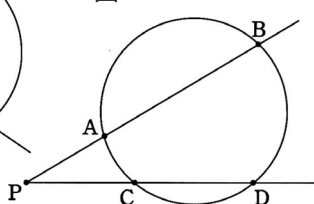


図1からは、図3のア、イのような相似な三角形が見つかる。

図3-ア

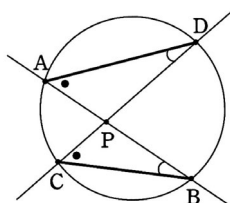
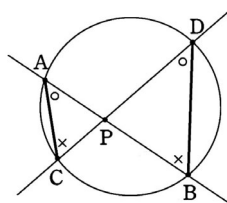


図3-イ



また、図2からは、図4のア、イのような相似な三角形が見つかる。

ただし、図4のイは、「円に内接する四角形の性質」を本文では扱えないため、教 p.181 の[ジャンプ]での扱いとなっている。

図4-ア

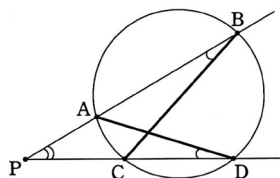
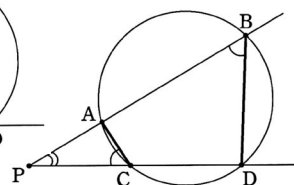


図4-イ



教 p.182 の[ジャンプ]では、上記のいずれの場合においても、 $PA \times PB = PC \times PD$ が成り立つことを数学的な活動を通して確認することになっている。

3 PA×PBは何を表すのか？

教師用指導書でもふれているように、こ

の性質は「方べきの定理」と呼ばれ、高等学校の数学 A で学習する内容である。

したがって、中学生への指導において、この性質を活用するような課題まで深入りする必要はないが、ここで気になるのは、 $PA \times PB$ の意味である。これは図形的にはどのような意味をもつのだろうか？

$PA \times PB$ は 2 つの線分の長さの積であるから、それらを各辺とする長方形の面積を表していると考えることができるであろう。

そのように解釈をすれば、 $PA \times PB = PC \times PD$ は、2 つの長方形の面積が等しいことを表していると考えることができる。

図 5 および図 6 は、それぞれ図 1 および図 2 の場合について、上記のことを示したものである。

図 5

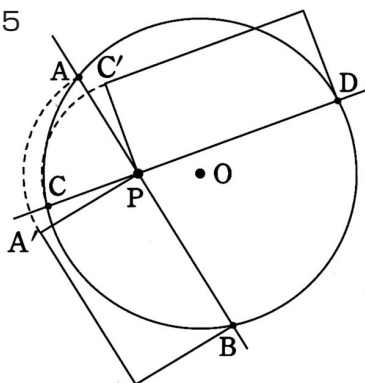
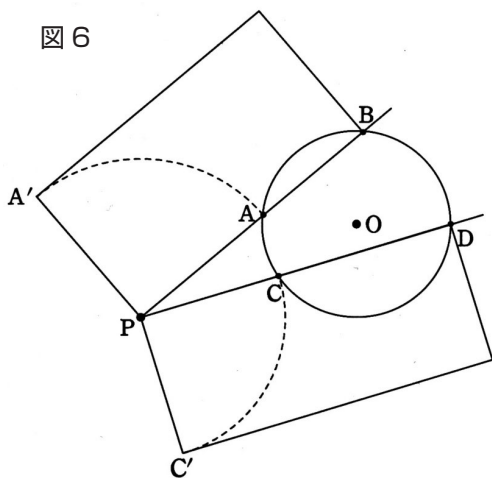


図 6



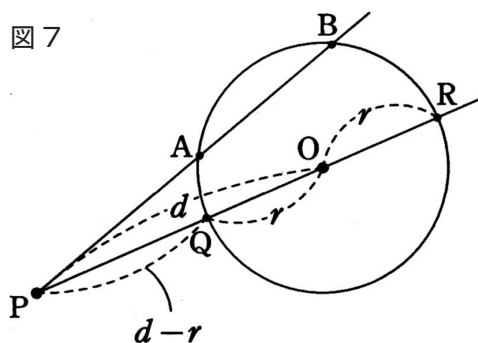
4 $PA \times PB$ が一定の意味は？

$PA \times PB = PC \times PD$ が成り立つということは、点 P を通り円 O と 2 点で交わる 2 直線をどのようにひいても、円によって分割される 2 つの線分の積が一定になることを意味している。その値はどのようになるのだろうか？

まず、図 2 のように点 P が円 O の外にある場合について考察してみよう。

「点 P を通り円 O と 2 点で交わる 2 直線をどのようにひいてもよい」のであるから、円外の点 P と円 O との位置関係を語ることでできるように、点 P を通る直線が円 O の中心 O を通る場合を考えてみる。(図 7)

図 7



円 O の半径を r 、点 P と円の中心 O の距離を d とすると、図 7 より次のことがいえる。

$$\begin{aligned} PA \times PB &= PQ \times PR \\ &= (d - r)(d + r) \\ &= d^2 - r^2 \end{aligned}$$

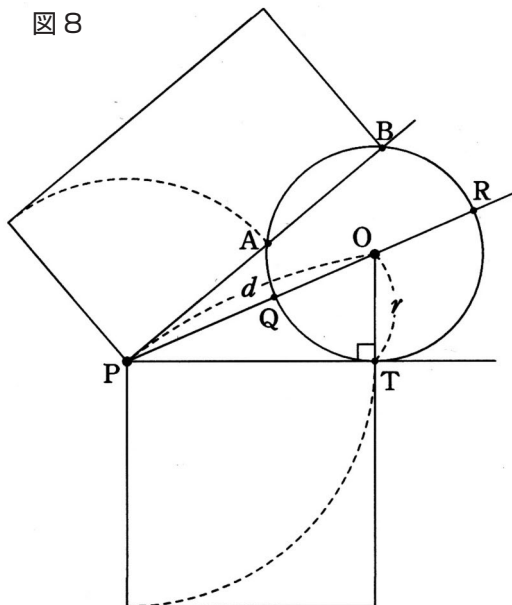
つまり、 $PA \times PB$ は、 r と d によって決定する値となる。

この結果の図形的な解釈を理解するには、次章の「三平方の定理」の学習を待たなければならないが、図 8 に示すように、 $PA \times PB$ の値は、円外の点 P から円 O にひいた接線の長さを 1 辺とする正方形の面積と一致するのである。

この一定の値のことを「点 P の円 O に関

する方べき」というのだが、上記のように考えると「方べき」というネーミングのよさが理解できるであろう。

図 8



次に、図 9 のように点 P が円 O の中にある場合について考えてみよう。

図 9

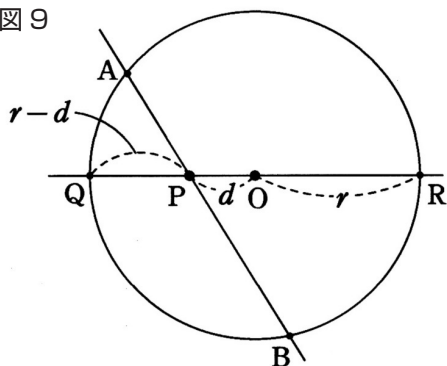


図 9 より次のことがいえる。

$$\begin{aligned} PA \times PB &= PQ \times PR \\ &= (r-d)(r+d) \\ &= r^2 - d^2 \end{aligned}$$

この場合もやはり、 $PA \times PB$ は、 r と d によって決定する値となり、図形的な意味は図 10 によって示される。

図 10

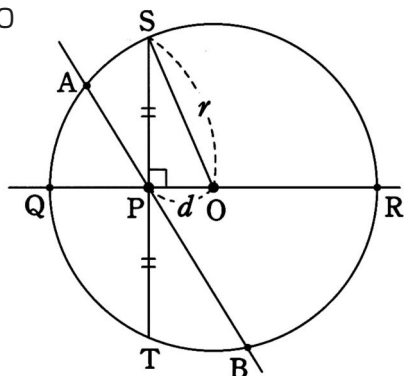


図 10 において、 $r^2 - d^2$ が何を表しているのかについては、もうおわかりであろう。

5 おわりに

今回取り上げた「方べきの定理」について、これを中学生にそのまま指導することを期待しているわけではない。相似を学んだことによって見えてくる、円と弦（割線）の不思議な性質について、中学生なりに探究する場面を設定できるのではないかという提案である。適切な数値や適切な場面設定によって、「相似」と「三平方の定理」をコラボするよい教材に仕立て上げることができるのではないだろうか。設計の詳細については指導者のアイデアと数学的な活動に委ねることにしたい。

なお、図 10 において、 $PQ=a$ 、 $PR=b$ とすると、 $PS=\sqrt{ab}$ となる。この関係は、根号のついた数の作図にも生かすことができるであろう。

さらに（これは中学生には余計なことではあるが）、 $OS=\frac{a+b}{2}$ であることに注目すると、図 10 は相加平均と相乗平均の関係を図形的に説明しているという見方もできるであろう。

指導者の数学的活動を通して、生徒にとって意味のある教材のストックを増やし、これを共有化していくことを期待したい。



【表紙・写真】

万年橋（東京都江東区）

現在の橋は、1930年（昭和5年）に関東大震災の復興計画として架け替えられたアーチ状の鉄橋である。橋の北岸は松尾芭蕉が居を構えた場所で、「芭蕉記念館」など、松尾芭蕉に関連した施設が点在している。



中学数学通信 coMpass 〔2014年 春号〕 2014年3月31日 発行

編集：教育出版株式会社編集局
印刷：大日本印刷株式会社

発行：教育出版株式会社 代表者：小林一光
発行所：教育出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町2-10 電話 03-3238-6864（お問い合わせ）
URL <http://www.kyoiku-shuppan.co.jp>



わたしたちをとりまく自然や社会は、科学技術の進展や国際化、情報化、高齢化などによって、今、大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で、人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには、人や自然を大切にしながら、共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは、この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め、社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社 〒060-0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445 FAX: 011-231-3509
函館営業所 〒040-0011 函館市本町6-7 函館第一生命ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886 FAX: 0138-31-0198
東北支社 〒980-0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391 FAX: 022-227-0395
中部支社 〒460-0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821 FAX: 052-262-0825
関西支社 〒541-0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221 FAX: 06-6261-9401
中国支社 〒730-0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033 FAX: 082-249-6040
四国支社 〒790-0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193 FAX: 089-943-7134
九州支社 〒812-0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100 FAX: 092-433-5140
沖縄営業所 〒901-0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411 FAX: 098-859-1411