

コンパス COMpass

compass は教育出版が発行する情報誌です



思考力を深める
学び合いの授業
づくり

教育出版

CONTENTS

「巻頭言」

思考力を深める学び合いの授業づくり—数理事象に迫ることと協働的に深めること— 金本 良通 3

〈特集〉思考力を深める学び合いの授業づくり

実践例 1 「資料の整理と活用」での思考力や表現力の育成を図る授業 蓮沼 喜春 4

実践例 2 思考力を育てる授業—既習の方法を結びつけて考える— 二瓶 哲哉 7

実践例 3 能動的学修と反省的思考の習得を旨とした授業づくり 大根田 裕 10

〈連載〉数学的活動へのイノベーション

正四面体を見る眼を養う 吉野 茂 13

第13回

まもなく締め切り!!

地球となかよし メッセージ
作品募集 (2015年度)

「地球となかよし」という言葉から感じたり、考えたりしたことを、
写真 (またはイラスト) にメッセージをつけて表現してください。

応募者全員に
参加賞が
もらえるよ!

応募資格	小学生・中学生(数名のグループ単位での応募も可)
応募期間	2015年7月1日～9月30日 詳細は「優秀作品展示室」とあわせてホームページをご覧ください。
作品 テーマ	①身のまわりの自然が壊されている状況を見て感じたことや、自然環境や生き物を守るための取り組み ②さまざまな人との出会いを通して、友好の輪を広げた体験、異文化交流、国際理解に関すること ③その他、「地球となかよし」という言葉から感じたり、考えたりしたこと

- ◎主催/教育出版 ◎協賛/日本環境教育学会
- ◎後援/環境省、日本環境協会、全国小中学校環境教育研究会、毎日新聞社、毎日小学生新聞
- *協賛・後援団体は昨年実績で、継続申請中です。

応募の決まりなど詳しくはホームページを見てね
<http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/>

前回
入選作品

挿し木

私は「挿し木」について考えました。私の家には、枝が長くとても高い「ウンベラータ」という木があります。その木がのびすぎているので、枝を切ってまた小さい木を育てはじめたり、いとこにわけたりしています。このように、少しずつ木を増やしていくことによって、酸素がふえて環境にいいことを改めて感じました。しかも、タネから育てるよりも早く大きく育ちます。そして、一つの木から何個かにわけるので、良いところを受けつぐことができます。私の家ではいろいろな木や草、花を育てています。それらは、私たちの生活にかかせない大切なものです。植林などもありますが、身近な家にあるものでも、少しずつ環境にやさしいことをしていきたいです。そして、一人一人が「植物」を大切にすることで、これからの将来につながると思います。



思考力を深める学び合いの授業づくり

—数理的事象に迫ることと協働的に深めること—

金本 良通 [埼玉大学教授]

数学科において学び合いの授業づくりが重要視されている。自立した人間として、他者と協働しながら、新しい価値を創造する力を育成するという観点から、そのことは改めて注目されている。

その際に強調したいことは、数理的な事象について考えているということであり、学び合いの授業づくりを授業形態論にしないということである。思考力を深めるということは、そのことを指す。

数学の問題や課題に取り組むとき、あるいは、日常生活や社会から数学的にモデル化された問題や課題に取り組むとき、学び合いの授業づくりを簡潔に言い表せば、「自ら考え、共有し、ともに創る」ということになるが、もう少し実現したいことを要素的に示すと、次のようなことが自然に出てくるような授業の場づくりが大切になってくると思う。

第1は、どのように考えたかの過程と結果を表現させていくことであり、他者にはその着想を問わせていくことである。学び合いには、思考過程や結果を知るということは当然のこととして、それらが生まれ出てきた元になる着想を共有し、豊かな視点と方法を獲得させていきたいものである。

第2は、根拠を明確にして論理的に表現

することであり、その根拠を問うていくことである。論理的に考え表現していくこと、その過程において、帰納・類推・演繹的な推論が発揮されていくことが大切なことと思う。そのためにも、根拠を問うことは欠かせない。

第3は、数学的な表現を用いて表現することである。「これ」「あれ」ではなく、数学的な用語・記号を用いて表現していくこと、数学の世界で考えることである。そして、そのような表現の結果を振り返って、数学的に洗練していくことであり、そのよさを味わうことである。

第4には、多面的な見方や考え方を大切にしながら、それらの共通点や相違点を明確にし、統合的に考えたり、拡張したり、発展的に考えたりすることである。創造的活動を大切にすることが、新たなものを創造していくことへとつながっていく。

このようなことを、協働的におこなっていきたいのである。数学的な問題や課題について、自立的に考え、また、協働的に深めていきたいのである。そして、このようなことが、これからの数学学習の展開において生徒たちに身につけさせていきたい資質・能力となってくることと思う。

実践例 1

「資料の整理と活用」での 思考力や表現力の育成を図る授業

蓮沼 喜春

【東京都荒川区立尾久八幡中学校教諭】

1. はじめに

改定学習指導要領の先行実施により、「D 資料の活用」領域は2009年から各中学校で指導が行われている。以前の「資料の整理」の内容とは異なり、「資料の活用」では単に資料を集めて整理するだけでなく、目的に応じて整理し、それを読み、解釈することが求められている。この領域における教材や指導方法及び評価方法についての研究を深めていく必要があると考え、本実践に取り組んだ。

2. 本校での授業実践

本校では、第1学年「資料の整理と活用」の学習において、「時間の感覚がどの程度正確なのか調べてみよう」をテーマに、『体内時計選手権』と題して、「ストップウォッチの表示を見ないで、ちょうど10秒を測る」実験を行う課題に取り組んだ。

この題材は、ストップウォッチさえあれば実験が可能である。生徒はゲーム感覚で楽しんで実験し、また、自ら資料の作成・収集に関わることとなるので、その後の度数分布表への整理や、次時以降のヒストグラムや度数折れ線の作成、分析などにも意欲的に取り組むことができる。

(1) 第1時…記録を収集し、度数分布表にまとめよう

授業の初めで課題を伝え、4～5人グループにストップウォッチ1台、記録用紙、マジック1本を配布した。操作練習を行った後、1回ずつ記録の測定をした。

測定後、ストップウォッチとマジックを回収し、記録用紙を黒板に掲示した。



そして、ワークシートを配布して、クラス全員分の記録を転記させた。生徒は、記録を転記しながら、口々に各記録に対する様々な感想を述べていた。記録の転記が終わったところで、「これらの記録からどのようなことがいえますか。」と発問した。

- ・ちょうど10秒だった人がいる！
- ・10秒台が多い。 ・9秒台も多い。
- ・一番遅く押したのは15.92秒だ。

などの反応があった。

次に、「これらの記録をどのように整理したらよいですか。」と発問すると、

- ・8秒台、9秒台、10秒台、…のように表にまとめる。
- ・記録の平均を求める。

と反応があった。そして小学校6年で学習した度数分布表(ただし用語は未習)にまとめるとよいことを生徒に発言させ、教師が度数分布表の枠を板書した。度数分布表や階級、階級の幅などの用語を導入し、「どのような階級や階級の幅にするとよいか、先ほどのグループで話し合いながら、度数分布表に記録をまとめましょう。」と指示をした。

多くの班では「8秒以上9秒未満」のように、階級の幅を1秒にした度数分布表を作成するが、徐々に「このほうが分かりやすい」と階級の幅を0.5秒に変える班が出てきた。作成した度数分布表を黒板に貼って比較させると、階級の幅を0.5秒に変えて作った班の度数分布表に関心が集まった。班の生徒にその理由を発言させると、「階級の幅を0.5秒にしたほうが、人数の多い階級のところのもう少し詳しい様子が分かると思ってこうしました。」と説明があり、これを聞いた他の生徒は同意していた。

このように、グループで集計作業を進めながら話し合いをすることで、全体の傾向の分かりやすい表に作り変え、資料の傾向を的確に捉えようとする姿勢が見られた。また、同じ資料であっても、集計方法によって傾向や特徴の読みやすさや説得力などが異なることに気づくきっかけとなり、それが更なる議論につながっていった。

(2) 第5時…自分のクラス、学年全体、 先生方の記録を分析しよう

第2時以降、生徒は各クラスの記録をヒストグラムに整理し、その傾向について考察した。また、本校の教職員(1クラスと同程度の度数)の記録を度数分布表に整理し、ヒストグラムや度数折れ線に表して分析した。そして、各クラスの記録をまとめて学

年全体にした記録を、stathist [裕元, 2012]^{**}を使って度数分布表やヒストグラムに表した。このとき、階級の幅を変えるとヒストグラムの様子が変わることなども体験した。そしてこれらの学習過程で、相対度数や中央値、最頻値といった用語を学習した。

そこで本時は、これまでに学習してきたことを活用することを目的として、次のような課題に取り組んだ。

【課題】 選んだ2つの集団について比較を行うことから、体内時計・時間感覚にどのような傾向・特徴が見られるか分析してまとめよう。

例えば、「学年全体と先生方を比較すると、体内時計にこのような特徴が見られます。」といった内容を説明する活動である。この際、次のような構文でまとめを行うように指示をした。

私は、AとBを比較すると○○○○だと思えます。なぜならば、○○○○をみると○○○○という特徴がわかるからです。

筆者は、この形で考察を述べることによって、比較して気づいたことだけでなく、そう判断した理由、さらに、判断の根拠となった資料を示すことができ、「資料の傾向を的確に捉え、事柄の特徴を数学的に説明する」ことに迫ることができると考えた。

本時の前半は個人で分析作業を行って考察をまとめ、後半は隣の席の生徒と2人組を作って、相互に考察の発表を行った。教師は、前半では主に分析の仕方が分からない生徒を重点的に机間指導して、2本の度数折れ線(または2つのヒストグラム)を比べて気づくことを口頭で発言させ、そのことを文章にまとめるように支援した。また、後半では相手の発表をよく聞くとともに、「根拠となる資料はどれで、どの部分に注目したか」を問うように指導した。

聞き手がいることで、発表する生徒は自然と緊張し、自分の説明を理解してもらおうと説明に力が入るようになった。説明が苦手な生徒でも、前述の構文にそって考えを述べるので、考えをまとめやすくなり、発表することができた。聞く側の生徒には、示されたヒストグラムなどを見ながら相手の説明をしっかりと聞こうとする姿勢が窺えた。中には生徒の説明に直ちに納得せず、内容を確認し直そうとする様子もあった。

3. 実践を通して

筆者は、学び合いには次の4つのよさがあると考えた。

- 自分の考えを明確にできる
- 自分の考えを他者に伝える
- 他者の考えを聞き、取り入れ、自分の考えをよりよいものにする
- 自分の考えや他者の考えを振り返り、次の学びを見出す

第1学年「資料の活用」領域の目標は、目的に応じて収集した資料を表やグラフに整理し、代表値や資料の散らばりに着目してその資料の傾向を読み取ることである。集計作業を4～5人グループで話し合いながら行うことで、全体の傾向の分かりやすい表に作り変え、資料の傾向を的確に捉えようとする姿勢が見られた。また、2人組で構文に沿って考察を発表し合う活動を通して、生徒は、意見の交流が活発になり、自らの考えを、根拠を明確にしながら分かりやすく伝えることができるように変容してきた。このように、話し合いや相互発表といった学び合いは、思考力を深め、本領域の目標達成のために有効だったといえる。

また、本領域の指導では、統計的問題解決過程としてニュージーランドで提唱されているPPDACサイクルが参考となる。

このサイクルは、次の5つで定義される。

- Problem (問題の設定)
- Plan (問題を解決するための計画)
- Data (実験や調査によるデータの収集)
- Analysis (分析)
- Conclusion (問題に対する結論)

このサイクルは、ニュージーランドで統計の授業を進める上でのガイドラインとなっている。本実践の場合、第1時は、課題を提示し(Pr)、実験方法を説明した(Pl)後、実際に記録を収集し(D)、グループで話し合いながら度数分布表に整理した(A)。第5時は、2集団の特徴を調べる課題を提示し(Pr)、すでに収集した資料を基に(Pl, D)、資料を比較・分析し(A)、2人組で考察を発表し合う(C)活動と捉えることができる。また、前述した構文は次のように解釈できる。

私は **Conclusion** だと思います。
なぜならば、**根拠となる Data** をみると
Analysis という特徴がわかるからです。

統計の授業では、(1)生徒が探求しなくなる課題を設定し、(2)この課題の解決のために必要な資料を収集し、(3)傾向をとらえるために資料をヒストグラムや度数折れ線に表現し、代表値を求め、(4)資料の傾向を読み取る、という過程を経験できる授業づくりが求められる[裕元, 2013]。その際、学び合いを取り入れることが、この領域における思考力や表現力の育成に有効であると筆者は考える。

[引用・参考文献]

- ・永田潤一郎(2012)『数学的活動をつくる』東洋館出版社
- ・裕元新一郎(2013)『中学校数学科 統計指導を極める』明治図書
- ・国立教育政策研究所(2013)「平成25年度 全国学力・学習状況調査 報告書 中学校数学」

※ stathist: ブラウザ上で動く統計ソフト。PCへのインストール不要、複数のヒストグラムを画面上で並べられる、といった点が特徴。<http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~esmatsu/statistical-thinking.htm> (裕元新一郎研究室)

実践例 2

思考力を育てる授業

－ 既習の方法を結びつけて考える －

二瓶 哲哉

〔神奈川県川崎市立菅生中学校教諭〕

1. はじめに

数学の授業づくりをするにあたり「なぜ数学を教えるのか」「数学を通して、どんな子どもを育てたいのか」授業者はこの問いに対する答えを持って、授業に臨むべきである。もちろん、この問いの答えは様々であると思う。教科書に書いてあることを教えればよい、学習指導要領に決められているから、それを教えればよいという受け身な考えではなく、主体性をもって授業をつくっていくことが重要である。

今回の授業は「数学を通して見方・考え方を養う」という授業観で臨んだ実践例である。この授業実践例から学び合いの様子も伝えていければと思う。

2. 授業の実践例

(1) 課題の内容

第1学年第2章「文字と式」の指導を、17時間の計画で進めた。この中の16時間目「帯分数と1次式」の授業を紹介したい。内容としては以下のものである。

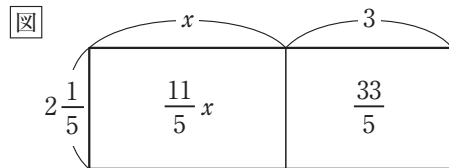
【課題】 $2\frac{1}{5}(x+3)$ の乗法のしかたを考え計算しましょう。

(2) 課題で取り上げたい反応

課題で取り上げたい反応は、2つある。

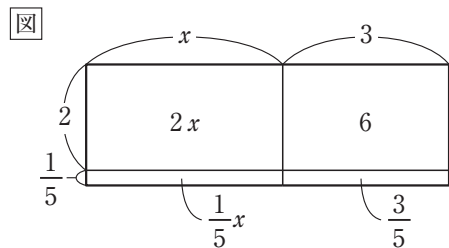
A：仮分数に直し、計算する方法

$$\text{式} \quad 2\frac{1}{5}(x+3) = \frac{11}{5}x + \frac{33}{5} \quad \left(2\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}\right)$$



B：帯分数のまま、計算する方法

$$\text{式} \quad 2\frac{1}{5}(x+3) = 2x + 6 + \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$



Bについては、3年次で学習する「項数×項数で分割した面積図」を用いている。1年生から3年生につながるような考え方を身につけさせたい。では、Bについての反応を取り上げるには、どのように単元を進めればよいのか。私が行った単元の計画を紹介する。

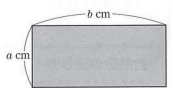
(3) 単元の計画

この【課題】に取り組むためには、3年次で学習する「項数×項数で分割した面積図」、「計算のしかたを図（面積図）を用いて考えること」、分配法則の計算を通して「分けて考え、後からまとめる」という解決方法を身につけておく必要がある。

そのために、第2章の6時間目では、教科書「中学数学1」p.65の問1を学習した後、「 $2(a+b)\text{cm}^2$ とはどのような図になりますか。」と応用した問題を扱った。

【教科書「中学数学1」p.65】

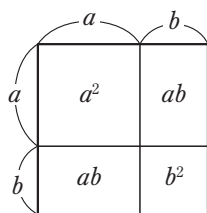
問1 縦が $a\text{ cm}$ 、横が $b\text{ cm}$ の長方形で、次の式はどのような数量を表していますか。
 (1) $ab\text{ cm}^2$ (2) $2(a+b)\text{ cm}$



また、この問題を解く中での生徒の誤答

生徒の誤答

$2(a+b)\text{cm}^2$ を図で表すと、下のようになる。

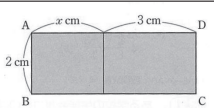


を活用して、7時間目ではこの誤答の図の読みとりを行わせて、 $(a+b)^2$ または $a^2+ab+ab+b^2$ と表現するまでを学習した。

10時間目では、教科書 p.72 を参考に「 $2(x+3)$ の計算のしかたを考えましょう。」という問題を扱った。

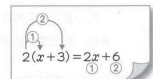
【教科書「中学数学1」p.72】

Q 右の図の長方形 ABCD の面積を式で表してみましょう。



項が2つの1次式と数の乗法は、分配法則を使って、次のように計算することができる。

$$2(x+3) = 2 \times x + 2 \times 3 = 2x + 6$$

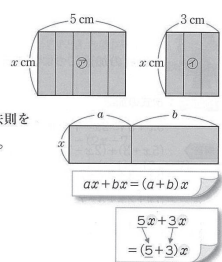
$$a(b+c) = ab + ac$$


これにより計算のしかたを考えるには、式と面積図を結びつけて捉えることが大事だと実感させた。また、図から横の長さを x と 3 に分けて考え、長方形の面積をそれぞれ $2x$ と 6 と求めて、後からまとめるという解決方法を身につけさせた。

そして、これまでの学習を受けて12時間目では、教科書 p.75 を参考に、

【教科書「中学数学1」p.75】

Q 右の図の長方形の、①の面積の和と②をそれぞれ式で表してみましょう。



文字の部分が同じ項どうしの和は、分配法則を使って、次のように簡単にすることができる。

$$5x + 3x = (5+3)x = 8x$$

$$ax + bx = (a+b)x$$

$$\frac{5x + 3x}{x} = \frac{(5+3)x}{x}$$

a) $5x + 3x = (5 + 3)x$

b) $5x + 3y$

c) $5x + 5y$

の3つの計算のしかたを、図を使って表す問題を扱った。

この3つの問題を扱うことで、16時間目の課題に取り組ませる前に「項数×項数で分割した面積図」、「計算のしかたを図（面積図）を用いて考えること」、分配法則の計算を通して「分けて考え、後からまとめる」という解決方法を身につけておいた。

(4) 学び合いを促す発問

【課題】 $2\frac{1}{5}(x+3)$ の乗法のしかたを考え計算しましょう。

この【課題】に取り組む生徒の各自思考において、仮分数に直し、計算する方法(A)と帯分数のまま計算する方法(B)を取り上げた。この2つの方法とそれに伴った面積図を板書させ、「これから板書した考えを

説明してもらいます。まず近くの人と確認し、説明し合ひましょう。」と発問した。

Aの方法について生徒に説明させた後、Bについては「Aとはここが違うけど、ここが同じだよって形で説明できますか。」と発問した。これは2つの解決方法を関連づける発問である。また生徒の反応が思わしくないときには、「近くの生徒と相談してください。」と必要に応じて確認する時間をとることも大事である。生徒が説明する中で、キーワードとなる言葉は全体に返しなが板書していった。その後、「このAとBの考え方で大切なことは何でしょう。」と発問し、どのように考えることが大切だったかをまとめた。

(帯分数 × 1 次式で大切だったこと)

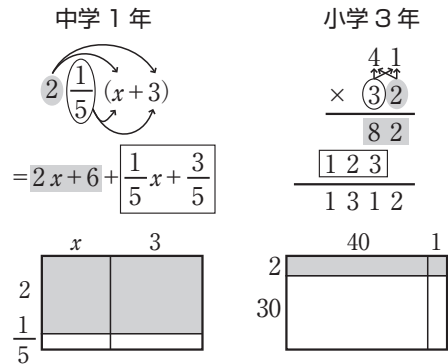
- ・面積図を使って考える。
- ・分けて考え、後でまとめる。

(5) 課題を振り返るまとめの問題

(振り返り) 41×32 を計算しましょう。

この問題を出したとき、生徒の反応は二極化した。「この問題は簡単に解くことができる。」「なぜこの問題をまとめにしたのだろうか。」と二通りである。

黒板で生徒に解かせた後、「すごく詳しく説明できますか。」と解決方法を結びつける発問をした。「 $2 \times 1 = 2$, $2 \times 40 = 80$, $30 \times \dots$ 」この瞬間、「筆算も分けて考えている。」と気づく生徒がいた。もちろんこの式だけでは、気づかない生徒もいたので、次のような面積図を用いての説明もした。



この授業後の生徒の感想を紹介したい。

- ・ずっと前から、どのようにしたら、こういう筆算の形になるのだろうと不思議だったけど、分けて考え、後からまとめることが今日分かって理解した。
- ・数学は習ったことのあることばかりで、実は「数学的な見方・考え方」は全て習ったことがあるということは奥深くなるほどと思った。

筆算の学び直しの感想や方法を結びつけて捉えた上で、これ以外の解決方法のつながりを意識している感想があった。

3. おわりに

私の授業では「数学を通して見方・考え方を養うこと」を目的におき、今回は「分けて考え、後からまとめる」という解決方法を紹介した。

この授業の半年後に行われた体育祭での生徒の言葉を紹介したい。

「応援の練習でも、分けて考え、後からまとめる方法が使われていますね。」

この言葉は、数学が日常生活でも活用されていると気づいた表れであると思う。これからも、解決方法を自ら結びつけて考えることができる生徒を育てていきたい。

実践例 3

能動的学修と反省的思考の習得を 目指した授業づくり

大根田 裕

【筑波大学附属中学校教諭】

1. はじめに

数学の学習指導における教師の役割は、課題の解決方法を教師の側から一方的に提示したり、丁寧に説明しようとするものではなく、生徒たちの主体性や追究意欲を尊重して、あたかもそれを自分(たち)自身の力で解決したように感じさせ、数学的問題解決の過程に興味と自信を与える指導のあり方であると考えている。そして、課題は、生徒たちの探究意欲を尊重し、追究意欲を支援しながら興味関心を抱き続けられるようなものになっていけば申し分なく、その解決方法にある程度の見通しが得られるものであればなお望ましいと言える。

本稿で用いる能動的学修は、平成24年8月28日の中央教育審議会答申(いわゆる「大学教育の質的転換」に関する答申)の中で示されたものであるが、相手が中学生であるから、それを目指すための素地指導としての学び方のサポートが必要である。さらに、ここでは、課題解決において、解決に至らなかった場合に、人がよく用いる「反省的思考の習得」を目指した授業を提案する。

2. 授業の実践

(1) 実践事例1

ここでの目標は、「根拠を明らかに筋道を立てて伝え合う」ために、主体的に学習

に取り組む態度を育成する場を設定することと、やりとりを通して表現方法を洗練させていくといった、学び合いの場を設定することにある。そのための第1段階として、主体的に学習に取り組むための発問を工夫し、第2に、生徒同士のやりとりを発生させる素地としての、記述指導を行う。

第2学年に、次のような設問Qがある。

【教科書「中学数学2」p.25】

<p>Q 2桁の自然数と、その数の一の位の数と十の位の数を入れかえた数を考えます。この2つの数の和は、どのような数になるかを予想してみましよう。</p>	$26+62=?$
	$51+15=?$
	$84+48=?$
	⋮


(1)-1 発問の工夫

生徒の興味関心を引き出し、主体的な活動を誘発させることは教師の役割となる。「決まりを見つけ、説明してみよう。」と発問しても、生徒自身の興味関心が発現しなければ、生徒の活動は受動的になってしまうものである。では、発問を「どんな数になるか予想してみよう」とすると、何がどう変わるだろうか。少なくとも、「異なった数でも、同じことがいえるのかな?」「いつでも、同じことがいえるのかな?」といった問が自然発生してくるのではないだろうか。生徒にとって、「できた!」という達成感だけではなく、主体的に学習に取り組む意欲を生み出すことが大切と考える。

(1)-2 記述指導

教科書「中学数学2」p.25の例題2では、その解答が記述されている。

解答 2桁の自然数の十の位の数を x 、一の位の数を y とすると、
 もとの自然数は $10x+y$
 入れかえた数は $10y+x$
 と表すことができる。その和は、
 $(10x+y) + (10y+x) = 11x+11y$
 $= 11(x+y)$
 $x+y$ は整数であるから、 $11(x+y)$ は11の倍数である。
 したがって、2桁の自然数と、その数の一の位の数と十の位の数を入れかえた数の和は、11の倍数になる。



しかし、教科書を開かず、生徒に解答を記述させると、20行目の「 $x+y$ は整数であるから」を省いてしまう生徒が多々見受けられるのが現状ではないか。板書や実物投影機を使って提示し、「整数であることを主張しないとイケない！」といったやりとりを通して、「根拠を明らかに筋道を立てて伝え合う」という姿勢が身につくのではないかと考えている。さらに、p.26問2では、条件を変えて考える課題を用意し、学力を確実に身につけるため段階的に扱っている。

問2 2桁の自然数と、その数の一の位の数と十の位の数を入れかえた数の差について、どのようなことが予想できますか。また、その予想が正しいことを、文字を使って説明しなさい。

(2) 実践事例2

ここでは、2桁の計算を行い、その結果から興味関心を誘発させ、その理由づけのための説明（証明）を行わせるが、解決には至らない場面を設定する。そして、解決に至らなかった原因を探るため、思考の「振り返り」を行い、一つ一つ原因究明を行っていく中で、反省的思考を身につけられるよう企てていく。

【課題1】 2桁の自然数と、その十の位と一の位の数を入れかえてできる2桁の数をつくり、大きい数から小さい数の差をとる。次に、その差と、その十の位と一の位の数を入れかえた2桁の数との和を求めてみよう。

(具体例)

$\bigcirc \triangle$ ($\bigcirc > \triangle$)	63
$-\triangle \bigcirc$	<u>-36</u>
$\square \nabla$	27
$+\nabla \square$	<u>+72</u>
	99

【課題2】 計算結果は、すべて99になるのか？

教師が、この計算結果を言い当て、計算の不思議さに触れながら、その説明を求めると、生徒はどのような反応を示すのだろうか。おおかたの生徒は、次のような反応を示し、戸惑うのではないだろうか。

予想される反応

- ① 2桁の整数を $10a+b$ 、入れ替えた数を $10b+a$ として、差を $9(a-b)$ と表現してしまい、次の数の入れ替えができない生徒。
- ② 差を $10(a-b) + (b-a)$ 、入れ替えた数を $10(b-a) + (a-b)$ と表現して、和を0としてしまう生徒。

(2)-1 発問の工夫

ここでの発問の工夫には、第1段階の生徒の興味関心を引き出し、主体的な活動を誘発させることよりも、第2段階での、多くの生徒が解決に至らないで停滞する中で、「思考の振り返り」を行わせ、「反省的思考の習得」を目ざした発問の工夫を行わせることにある。これまでの学習指導の経験から、このような状況では、次のような発問の流れが効果的であると考えられる。

発問の流れ

- 発問1 いくつになった？
- 発問2 みんな、99になる？
- 発問3 違う人いる？
- 発問4 どんな数でも、99になる？

上記のような発問の流れに対して、予想される反応①②が見受けられたら、教師の出番である。そして、解決に至らなかった

原因を探るべく、「思考の振り返り」「見直し」といった解決のための手立て(支援のための発問)が授業を展開する上で重要となる。

この段階では、教師がどのように生徒と対峙するか、どのような打開策を講じて授業を展開するかがポイントであり、支援のための発問として、私のこれまでの経験上、次のような発問の流れで授業を展開するのが効果的であると考える。

発問の流れ

- 発問1 $9(a-b)$ とした人、どれくらいいる？
発問2 次の差を表すことができなくて困っているのかな。2桁の数を表すにはどうすればいいのかな？
発問3 Aさんは、 $10(b-a) + (a-b)$ と表しているよね(褒めながら発問すること)。君たちはどう思う？

予想される反応

- ・ $(a-b)$ は負になっている。
- ・ 十の位の数 $(b-a)$ は、実際の数と異なっている。

- 発問4 (上記の反応が散見できたら、すぐに)君たちが計算した、実際の数と見比べてごらん。どのように表せばいいかな？

(2)-2 指導の実際

〈第1段階〉

- 生徒たち：99になる。
教師：みんな、99になる？
生徒たち：なります。
教師：違う人いる？
生徒：は～い。あっ！計算違いだ。
教師：どんな数でも99になる？断定していいの？
生徒たち：文字を使えば説明できると思います。

〈第2段階〉

- 教師： $9(a-b)$ とした人、どれくらいいる？
生徒たち：……。
教師：なるほど、次の差を表すことができなくて困っているようだね。2桁の数を表すに

はどうすればいいのかな？

- 生徒たち：……。
教師：Aさんは、 $10(b-a) + (a-b)$ と表しているよね(褒めながら発問する)。
なかなかすばらしいと思うけど、君たちはどう思う？周りとは相談していいから、話し合ってください。
生徒たち：(しばらくして)……あっ。
生徒たち： $(a-b)$ は、負の数になっている。
教師：他には？……君たちが計算した、実際の数と見比べて(比較して)ごらん。どのように表せばいいかな？
生徒： $(a-b)$ は、くり下がりがあから+10が必要。
教師：となると？十の位の数は？
生徒たち：くり下がりがあから-1
教師：入れ替えた数は、どう表せるかな？
生徒たち：あっ！そうか！
 $10(b-a-1) + (10+a-b)$ だ！
教師：となると、2桁の数の和は、
生徒たち： $\{10(b-a-1) + (10+a-b)\} + \{10(10+a-b) + (b-a-1)\} = 10 \times 9 + 9 = 99$ となります。

3. おわりに

生徒たちは、このような課題に慣れていないためか、おおかたの生徒はフリーズしてしまう。そこで「2桁の数の式表現は、よかったのかな？具体的な数字の計算と比べてごらん！」とでも支援すると、「一の位の数 $(b-a)$ は負になっている」、「十の位の数は、くり下がりがあから-1、しなければならぬ」などの振り返りの反応が返ってくるものである。そこで、「入れ替えた数は、どう表せばいいかな？」と問えば、プレースホルダーのような発想が生まれてくるのではないだろうか。そうなれば、 $10(a-b-1) + (10+b-a)$ に接近できるはずである。また、この方法以外にも、実践事例1を利用するという方略を採用すれば、11と9の倍数から99に接近することも可能であることを、ここで記しておく。

正四面体を見る眼を養う

吉野 茂

[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]



1. はじめに

以前に、「封筒から作る四面体」の考察を取り上げたことがある。(2011年春号)

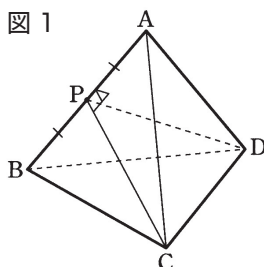
正四面体については、中学校1年生の教科書に登場するものの、それ以降、その計量について教科書では扱われていない状況にある。しかし、空間図形について、自分で視点を決めて観察し、分析的に考察するという見方や考え方を身に付けたり、実感を持って理解を深めることの学習を進めるといふ点で、正四面体は、もっと積極的に扱ってよい立体ではないかと考える。

ここでは、以前の拙稿の続編として正四面体の体積のいろいろな求め方や正四面体の接球について考えてみようと思う。今回もやはり立体を手元において考察しよう。

2. 正四面体の体積の求め方は？

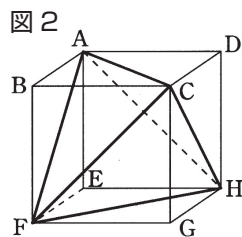
3年生の図形の指導を一通り終えた段階を想定し、正四面体の体積について、どのようなアプローチができるかを検討しよう。

1年生で直線と平面の垂直関係を学習しているので、**図1**のように、面PCDと辺ABと位置関係を確認することにより、正



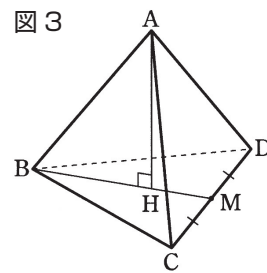
四面体 ABCD の体積を求めることができる。このような見方は、例えば今春の富山県の入試などにその出題例がある。

2年生では、立方体の切断についての考察(p.173 ジャンプ)を行っているので、**図2**のような立体 ACFH が正四面体になることを理解することもできるであろう。このような立体の見方は、例えば2014年の京都府の入試などにその出題例がある。



さらに、三角錐 BACF の体積がもとの立方体の $\frac{1}{6}$ になることや、 $\triangle ABC$ などが直角二等辺三角形であることをもとにすれば1辺を a とする正四面体の体積が $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ と一般化されることも容易に理解できる。

一方、**図3**のように頂点Aから底面BCDにひいた垂線の足をHとし、AHをこの立体の高さとして体積を求める方法も考えることができる。



Hの位置を把握するには、Aから見たときの底面BCDをかいてみればよい。(図4) 現行課程では「重心」が中学校の学習メニューにはないが、「重心」に触れなくても、この図の中に30°、60°、90°の三角定規形を見出すことにより、

$BH:HM = 2:1$ となることは理解できるはずである。このことをもとにして、 $AH \times \frac{\sqrt{6}}{3} a$ となることがわかる。

なお、3年の教科書では重心も話題にしているのだから、これを活用することも可能である。(p.161 ジャンプ)

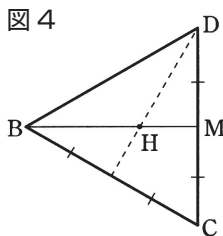


図4

3. 4つの頂点を通る球についての探究

次に、正四面体の4つの頂点を通る球(外接球)とその半径について考えてみよう。

図5はそのイメージを見取図に表したものである。

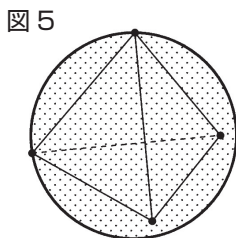


図5

図6に示すように、図3のAH上の点は、3点B、C、Dから等距離にあることを確認しよう。したがって、球の中心Oは、AH上のどこにあるはずである。

また、中心Oは2点A、Bからの距離が等しい点とも考えられるので、点OはABの垂直二等分線上にもある。したがって、

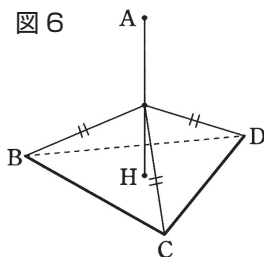


図6

面ABMにおいて、ABの中点をNとすると、点OはABとNMの交点となることがわかる。(図7)

以上のことを考慮して正四面体ABCDの見取図に表すと、図8のようになる。

ここで、点OはAHをどのように分ける点なのかを考えてみよう。

図8において、

$OA=OB=OC=OD$ となっていることがわかるが、このことは正四面体ABCDが、点OによってOHの長さを高さとする4つの合同な正三角錐に分割されることを意味する。このことから、 $OH = \frac{1}{4} AH$ となり、点OはAHを3:1に分ける(内分する)点であることがわかる。

また、この結果は、図7の面ABMにおいて、 $\triangle AON$ と $\triangle ABH$ が相似であることに着目することによっても確かめることができるので、計算させておきたい。

以上のことから、1辺をaとする正四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{4} a$ となる。

4. 4つの面で接する球についての探究

正四面体の4つの面に接する球とその半径についても考えてみよう。図9はそのイメージを見取図に表したものであるが、この内接球の中心はどこにあるのだろうか。

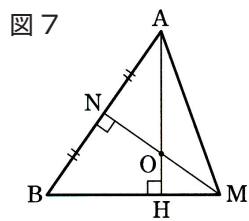


図7

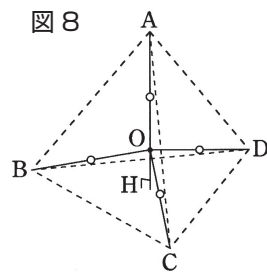


図8

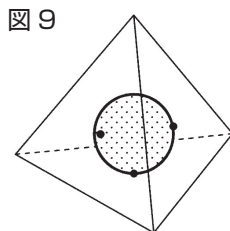
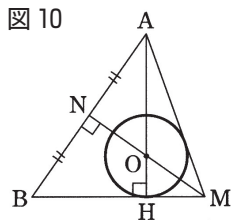


図9

先ほどの外接球の考察の中で、正四面体 ABCD が、点 O によって 4 つの合同な正三角錐に分割されることを確認したが、実は点 O から各面にひいた垂線の長さが、正四面体の内接球の半径となるのである。

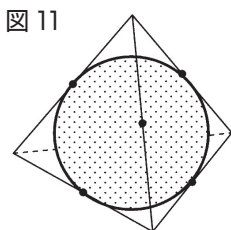
図 10 に示したように、面 ABM で考えれば、OH を半径とする円が内接球の大円を表していることになる。つまり、正四面体の内接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ となる。



5. 6 つの辺で接する球の探究

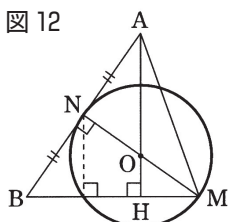
最後に、正四面体の 6 つの辺に接する球とその半径についても考えてみよう。

図 11 はそのイメージを見取図に表したものである。この球のイメージが捉えにくいときには、ストローなどで作ったフレーム型の正四面体の中で球状の風船を膨らませた模型を用意して、観察させるとよい。



正四面体の辺に接する球の直径は、正四面体の向かい合う 2 辺の中点を結ぶ線分の長さであることを見いだすことができる。

面 ABM で考えれば、図 12 のようになる。このとき、O が MN の中点になっていることは、 $\triangle OAN \cong \triangle OMH$ に注目した計算でも確かめられるし、N から BM に垂線をひき平行線と線分の比の性質を用いて 1:1 になることを導いてもよい。



このようにして、辺に接する球の中心は O に一致することが分かり、球の半径は MN の半分の長さとも一致するので、 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ となることがわかる。

なお、今回話題にした接球の半径を小さい方から、 r_1, r_2, r_3 として比較してみると、 $r_1:r_2:r_3 = 1:\sqrt{3}:3$ となる。つまり、内接球の半径を基準にして $\sqrt{3}$ 倍するごとに、辺に接する球、外接球が得られるということも見いだされる。

6. おわりに

今回取り上げた課題は、中学生にとって易しいものではないが、興味を持つ生徒も多いと思うので、実態に合わせて授業者が導入や展開を工夫してみていただきたい。

今回は、既習事項をフルに使う横断的に学び直す機会をつくることも意味のある活動の 1 つとなるのではないかと提案をさせていただいた。

最後に、大学入試問題を 1 つ紹介しておこう。今回取り上げた正四面体の外接球についての探究を理解した生徒ならば、解決することは可能だと思う。先生方も、ぜひ数学的活動を楽しんでいただきたい。

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは、 $AB \times \sqrt{3}, AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。
(2001 年 東京大学)



表紙・写真

仁^に摩^まサンドミュージアム（島根県大田市）

島根県大田市仁摩町には、全国有数の鳴り砂の浜「琴ヶ浜^{ことがはま}」があり、その鳴り砂とエジプトのピラミッドで発見された鳴り砂が似ていることから、ミュージアムの外観はピラミッドをイメージして建設された。館内には、鳴り砂の保護と環境保全を願い、1tの砂を1年かけて落とす世界最大の1年計砂時計「砂暦^{すなごよみ}」が設置されている。

中学数学通信 coMpass [2015年 秋号] 2015年9月1日 発行

編集：教育出版株式会社編集局
印刷：大日本印刷株式会社

発行：教育出版株式会社 代表者：小林一光
発行所：教育出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町2-10 電話 03-3238-6864（お問い合わせ）
URL <http://www.kyoiku-shuppan.co.jp>



なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は、科学技術の進展や国際化、情報化、高齢化などによって、今、大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で、人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには、人や自然を大切にしながら、共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは、この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め、社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

- 北海道支社 〒060-0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445 FAX: 011-231-3509
- 函館営業所 〒040-0011 函館市本町6-7 函館第一生命ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886 FAX: 0138-31-0198
- 東北支社 〒980-0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391 FAX: 022-227-0395
- 中部支社 〒460-0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821 FAX: 052-262-0825
- 関西支社 〒541-0056 大阪市中央区太田町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221 FAX: 06-6261-9401
- 中国支社 〒730-0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033 FAX: 082-249-6040
- 四国支社 〒790-0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193 FAX: 089-943-7134
- 九州支社 〒812-0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100 FAX: 092-433-5140
- 沖縄営業所 〒901-0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411 FAX: 098-859-1411