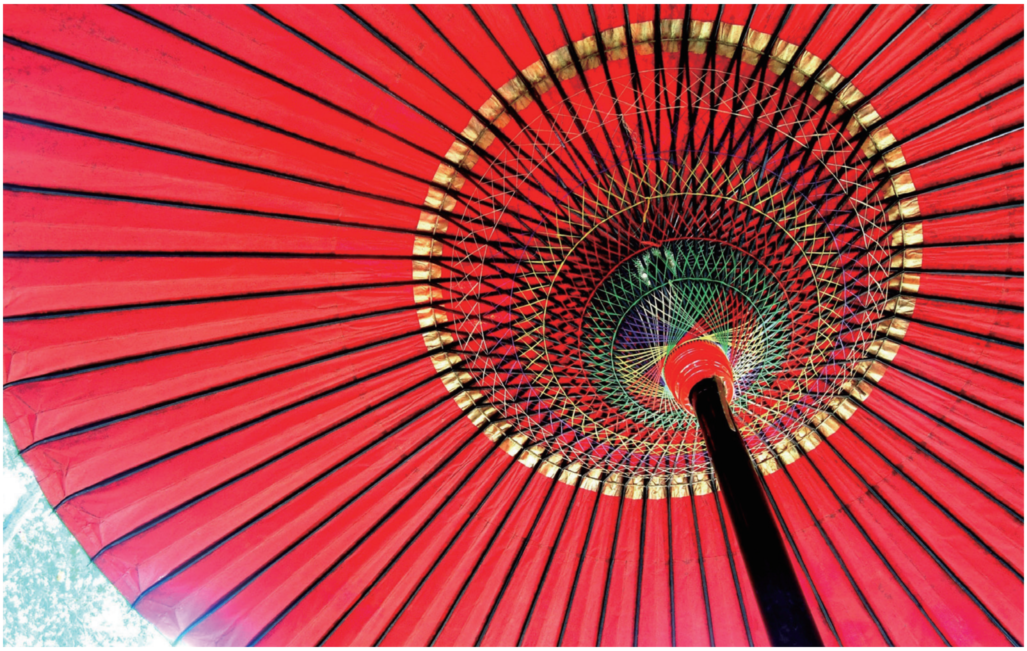
コンパス coMpass

教科書の教材を使った アクティブ・ラーニングの授業例

coMpass は教育出版が発行する情報誌です



教育出版

コンパス
coMpass
［中学数学通信］ 2016年 秋号

CONTENTS

「巻頭言」

算数・数学教育とアクティブ・ラーニング
～主体的・対話的で深い学びの実現～　金本 良通　3

〈特集〉教科書の教材を使ったアクティブ・ラーニングの授業例

授業例 1　「数と式」領域
対話的な学びを通して，主体的で深い学びを　山崎 浩二　5

授業例 2　「関数」領域
ジグソー法で比例定数と比例のグラフの関係を見出す　鈴木 誠　8

授業例 3　「図形」領域
オープンな問題を使ったアクティブ・ラーニングの授業　田村 潤一　11

授業例 4　「資料の活用」領域
経験的確率を樹形図で検証しよう　高山 琢磨　14

〈連載〉数学的活動へのイノベーション

続・『算額』の探究　吉野 茂　17

巻頭言

算数・数学教育とアクティブ・ラーニング
～主体的・対話的で深い学びの実現～

金本　良通　［日本体育大学教授］

１．アクティブ・ラーニングの提唱が意図するもの

大学教育の質的改善に向けて提起されたアクティブ･ラーニング（平成24年８月）が，初等中等教育の教育課程の改善の諮問（平成26年11月）にあたり，「『何を教えるか』という知識の質や量の改善はもちろんのこと，『どのように学ぶか』という，学びの質や深まりを重視することが必要」との認識のもと，「課題の発見と解決に向けて主体的・協働的に学ぶ学習」として示された。

その後，アクティブ・ラーニングの３つの視点「⑴習得・活用・探究の見通しの中で，教科等の特質に応じた見方・考え方を働かせて思考・判断・表現し，学習内容の深い理解につなげる『深い学び』が実現できているか。⑵子供同士の協働，教師や地域の人との対話，先哲の考え方を手掛かりに考えること等を通じ，自らの考えを広げ深める『対話的な学び』が実現できているか。⑶学ぶことに興味や関心を持ち，自己のキャリア形成の方向性と関連づけながら，見通しを持って粘り強く取り組み，自らの学習活動を振り返って次につなげる『主体的な学び』が実現できているか」が示され，さらに，資質･能力を育むための「主体的･対話的で深い学びの実現」というように，「深い学び」を中心に据えるものとしてその捉え方が定まった。

このような「主体的・対話的で深い学び」を教科の本質に根ざして実現することがアクティブ・ラーニングというキーワードによって求められている。

２．算数・数学科の教科の本質に根ざす

そのために，資質・能力を育む学習過程を明確にすることが必要になるが，中教審教育課程部会算数･数学WG（平成28年５月）は，それを「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」という「<u>数学的に問題解決する過程</u>」として捉えている（下線は筆者，以下同様）。そして，この過程において，「よりよい解法に洗練させていくための意見の交流や議論など<u>対話的な学び</u>を適宜取り入れていくこと」，「その際にはあらかじめ自己の考えを持ち，それを意識した上で，<u>主体的に</u>取り組むように」し，「<u>深い学び</u>を実現する」ことが求められる，としている。また,「アクティブ・ラーニングでは，『深い学び』『対話的な学び』『主体的な学び』の実現が大切であり，『～法』，『～型』といった特定の学習活動や学習スタイルの固定化や普及を求めているのではなく，画一的な指導にならないよう留意」する必要がある，としている。

３．算数・数学科において育成すべき資質・能力

このような算数・数学科での主体的・対話的で深い学びの実現によって，次のよう

な資質・能力の育成が期待されている。また，これらは教科の目標にも反映させていくことが求められている。

［小学校］

◎数学的な見方・考え方を働かせ，算数の学習を生活や学習に活用するなどの数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成する。

①数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに，日常の事象を数理的に処理する技能を身に付ける。

②日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力，基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力や，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり柔軟に表したりする力を養う。

③数学のよさに気づき，算数の学習を生活や学習に活用したり，学習を振り返ってよりよく問題解決したりする態度を養う。

［中学校］

◎数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成する。

①数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則などを理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり表現・処理したりする技能を身に付ける。

②事象を数学を活用して論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力や，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

③数学のよさを実感し，数学を活用して粘り強く考え，生活や学習に生かしたり，問題解決の過程を振り返って評価・改善したりする態度を養う。

かつて我が国の学習指導要領において設定されていた総括目標と具体目標の構造に似ており，①②③が学力の３つの要素「知識・技能」「思考力・判断力・表現力等」「学びに向かう力，人間性等」に対応するものになっていることが特徴である。

４．小学校や中学校の授業はどう変わるか

小学校や中学校の授業はどのように変わっていくか。ここでは，ポイントとなるものを次のように示しておきたい。

①数学的に問題解決する過程の遂行
②主体的・対話的で深い学びの実現
③数学的な見方・考え方を働かせる
④数学的活動を通す
⑤論理的に考察する力を養う
⑥統合的・発展的に考察する力を養う
⑦数学的な表現を用いて簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う
⑧問題解決の過程を振り返って評価・改善する態度を養う

これらのことが領域の指導内容に即して，一貫的に，かつ，学年の発達に伴って高まっていくように授業と教育課程をデザインすることが求められているといえよう。

算数・数学科の授業実践を通してこれらの姿を示しながら，さらに検討していきたいこととして，例えば活動の中で働かせている能力をどのように顕在化し共有するのか，また，算数・数学科の学習活動の中で働いている能力と教科横断的な汎用的能力とをどのように接続するとよいのかなど，実践をもとに提案していきたいものである。

授業例 1 〜「数と式」領域〜

対話的な学びを通して，主体的で深い学びを

−数学を活用して問題を解決し，さらに発展する活動−

山崎 浩二 ［岩手大学教授］

1．授業でアクティブ・ラーニングを実現するためのポイント

(1) 3つの視点から見た授業づくり

数学の授業におけるアクティブ・ラーニングでは，習得・活用・探究の見通しの中で，数学的な見方や考え方を働かせて思考・判断・表現し，学習内容の深い理解につなげる「深い学び」，生徒同士の協働や教師との対話などを通して自らの考えを広げる「対話的な学び」，さらには，興味・関心を持ち，粘り強く取り組み，自らの学習活動を振り返って次の学習につなげる「主体的な学び」，の3つの視点からの授業づくりが求められている。

「深い学び」については，数学的活動を通して，数学的な見方や考え方を生かしつつ，数学の概念の習得と能力の習得が一体となる授業づくりが望まれる。特に，発展して考える，統合して捉えることまで含めた，数学の学習を意識させたい。

「対話的な学び」については，数学のもつ多様性を生かすとともに，式や図，グラフなどを活用した「コミュニケーションとしての数学」の役割を存分に発揮させたい。

「主体的な学び」については，問題解決の過程としての数学もきちんと重視し，数学を学ぶことの楽しさや大切さにふれながら，数学を学ぶ意義を実感させたい。

(2)「数と式」領域における授業づくり

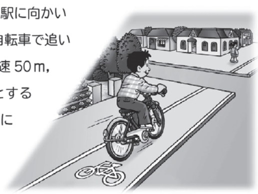
「数と式」領域では，アクティブ・ラーニングを通して，次のような数学的活動を充実させていきたい。

・数の範囲を拡張することの意味と必要性を実感し，それらを活用して問題解決する。
・数のもつ性質を帰納的に見いだし，文字を用いて演繹的に説明する。
・式で表現したり，式の意味を読み取ったりする活動を通して，多様に考え合い，伝え合う。
・事象を数学化し，方程式などを活用して問題解決する。
・数量の関係を，発展的，統合的に捉え，数学の学習の楽しさや大切さを実感する。

2．授業例 −1年・3章 方程式−

(1) 題材【教科書「中学数学 1」p.114 ?】

姉は，家を出発して 700ｍ離(はな)れた駅に向かいました。その9分後に，弟が姉を自転車で追いかけました。姉の歩く速さを分速 50ｍ，弟の自転車の速さを分速 200ｍとすると，弟は家を出発してから何分後に姉に追い着くか考えてみましょう。



⑵　授業の概要（学習のねらい）

この題材では，方程式を用いて日常の場面での問題を解決することを学習する。日常生活で数学を利用すること，さらには数量の関係を見いだし発展させること，などの数学的活動を意図している。

アクティブ・ラーニングの視点としては，「数学を活用して問題を解決し，得られた結果の意味を元の事象と結びつけて捉え直し，知識や方法を統合し，さらに発展する活動」を設定する。帰納や演繹，発展・統合，さらには理想化・単純化などの数学的な見方や考え方を働かせる場が期待できる。

３．授業の流れ

本時では，次の２つのねらいを想定する。

①一元一次方程式を活用して問題解決できる。

②方程式を解いた後に，その解がはじめの問題として適切なものかどうか調べることができる。

具体的には，教科書を使って，以下のような活動を仕組むことができる。

①方程式を活用して問題解決すること

ア　既習の内容と関連付けながら，解決の見通しを持つ。（設問 1）

イ　数量の関係を，図や表を用いて表現したり，説明したりする。（設問 2）

ウ　方程式を用いることの意味と必要性を理解する。（設問 3）

エ　方程式を解く。（設問 4）

②問題を発展させ，方程式の解を事象と照らし合わせたり，統合させたりすること

ア　方程式の解がはじめの問題において適切なものであるかどうかを調べる。（設問 5）

イ　はじめの問題の条件などを変えて新しい問題をつくり，学習内容をより深める。（設問 6）

４．授業の核となる学習活動での具体的な支援（発問，生徒の反応例，手立て etc.）

⑴　「結果」を見通す

グループ内で，問題場面を説明させたり，与えられた条件を明確にしたりするとよい。本文の問いは，「追いつくことができるのか」に変えてもよい。課題がより現実的になるとともに，結果を予想するなど，目的意識を高めることもできよう。

⑵　「方法」を見通す

まずは，グループ内で解決の方法を自由に考えさせたい。小学校では，二量の関係について，必要に応じて，図や表などを使って，数量の関係を表現しその変化の様子を帰納的に調べる学習を経験している。本時においても，当然，その学習経験に基づいて見通しをもたせたい。例えば，表を使うと，以下のようになる。

弟が出発してからの時間（分後）	0	1	2	3
姉の進んだ道のり（m）	450	500	550	600
弟の進んだ道のり（m）	0	200	400	600
2 人の進んだ道のりの差（m）	450	300	150	0

表　弟が出発してからの 2 人の移動の様子

表からは，「追い着く時間は，2 人の進んだ道のりが同じになる時間である」「2 人の進んだ道のりの差は，弟が出発してから 1 分間に 150m ずつ縮まっていく」「150m は 2 人の速さの差である」などが見いだせる。「なぜこのような変わり方をするのか」を問えば，グループ内で既習を根拠に説明し合う場もできる。時間とともに 2 人の進む道のりやその差の変化の様子をまとめることは，方程式の立式にも役立つ。

⑶　事象を数学的に解釈（数学化）する

「どのようになれば弟は姉に追い着くことになるか」を問い，「追いつく」ことが，「2 人の進んだ道のりが等しくなる」「道のりの

差が0になる」ことなどを引き出したい。このことから，$50x+450=200x$ や $50x+450-200x=0$ などの式を導くとともに，その意味も確認する。

2人の移動の様子については，図を用いて表現することなどの工夫をさせてもよい。特に，図や表を使うことは，理解に時間のかかる生徒の手がかりにもなる。グループ内で，式や図などの様々な数学的な表現をもとに，追いつくことの意味を共有し合うよう促したい。

実は，答えを得ることだけが目的であれば，この問題は表を使うことで十分である。そこで，「いつも表を作って調べるのか」と問うことで，方程式を活用する必要性をグループ内で確認し合い，共有させたい。

(4) 方程式の解を事象と照合し，検証する

「2人の速さを変えても同じように考えられるか」「姉の出発する時刻を変えたらどうなるだろうか。(変えても大丈夫か)」など，もとの問題を発展的に扱いながら，ねらいに迫っていきたい。

特に，「解は得られたのに，なぜ答えとして適さないのか」は，一見では判断しづらい。グループ内できちんと説明し合うなど，全員の確かな理解を促したい。

(5) 問題を発展させる

設問6では，問題文の中の「弟の出発する時間」「姉と弟の速さ」「家から駅までの道のり」などの数値を，グループ内でいろいろと変えて試行し，考察の結果をまとめ，発表する。追いつく状況やその条件なども次第に明らかになり，深い学びとなろう。特に，「弟は何分後までに出発すれば間に合うのか」を考えることなどは，生徒にとっても現実的な課題の一つとなり，興味深いものとなるのではないか。

(6) ジグソー法を用いた問題づくり

アクティブ・ラーニングの一つとして，ジグソー法を用いることも考えられる。

ジグソー法とは，EG(エキスパートグループ）とJG（ジグソーグループ）の2つのグループで構成される，協働学習の一つである。例えば，(5)のように問題文の数値だけでなく，他の様々な条件も変えて，「問題づくり」をしてみる。すると，例えば以下のような問題が予想される。

・「状況」を変える（双方から出発する問題，ループ状の道で反対方向に出発する問題，など）
・「条件」を変える（途中に休みを入れる，姉が家に戻る状況にする，など）
・「場面」を変える（時計の針が重なる問題，積立金の問題，水槽の水の出し入れの問題，など）
・「逆」の問題にする（弟が追いつくために必要な速さや道のりを求める問題，など）

グループ内で問題をつくり，その問題を分類し，分類の観点ごとにEGを組織する。EGでは，それぞれの問題を解く。次のJGでは，問題どうしの類似点などをまとめ，問題そのものの構造について考察する。結果はグループごとに発表したり，あるいは小レポートにまとめたりしてもよい。

問題づくりを通して，さらに発展的に考察することで，もとの問題の構造そのものにも着目する，深い理解が図られよう。

5．終わりに

アクティブ・ラーニングでは，やり取りに基づく対話的な学びを通して，深い学びや主体的な学びを追究していくことが大切である。ぜひとも，みんなで考え合うことの楽しさや大切さを実感させたいものである。

授業例 2 ～「関数」領域～

ジグソー法で比例定数と比例のグラフの関係を見出す

鈴木 誠 [東京学芸大学附属世田谷中学校教諭]

1．授業でアクティブ・ラーニングを実現するためのポイント

本稿では，グループ学習を通した指導について紹介する。グループ学習を行う上でポイントとなるのは，グループで行うことが明確になっていること，それぞれの子どもがグループ活動に参加できるような手立てが設けられていることだと考える。ここでは，そのひとつの方法としてジグソー法を用いた。この方法は，２つのグループ活動から構成される。１つのグループ活動(エキスパートグループ，以下ではEG）では，皆が共通の課題について解決する。このグループ活動の中で，自力解決できなかった子は，グループ内の理解している子から教えてもらい，理解することが必要となる。もう１つのグループ活動（ジグソーグループ，以下ではJG）では，最初のグループ活動（EGでの活動）で分かったことを持ち寄り，それらを組み合わせて新たな課題を解決する。従って，この活動の中では，グループを構成する生徒それぞれが，EGでの活動の中で得た情報を，グループのメンバーに伝えることが必要となる。グループの構成の仕方のイメージは図１のようになる。このようなグループ活動を行うことによって「対話的な学び」や「主体的な学び」を促すことができる。

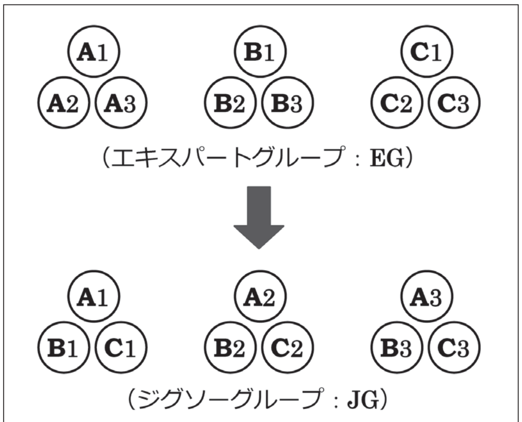


図１

2．授業について

⑴ 学習のねらい

比例定数と比例のグラフの関係について見出し，理解すること。

⑵ 課題

① エキスパートグループでの課題

> $y = ax$のグラフについて，グラフの特徴と比例定数aの変化によってグラフの形がどのように変化するか調べ，まとめましょう。

この課題は２つの課題に分けることができる。ひとつは$a > 0$の場合，もうひとつは$a < 0$の場合である。授業では，グルー

プを４人または３人で構成し，$a>0$ の場合について取り組むグループを５つ，$a<0$ の場合について取り組むグループを５つつくってグループ活動に取り組んだ。

②　ジグソーグループでの課題

> $y=ax$ のグラフについて，$a>0$，$a<0$ の場合のグラフ両方について共通していることや異なることをまとめましょう。また，a の値の変化によってグラフがどのように変化するかもまとめましょう。

JG は，EG で $a>0$ の場合について調べてきた生徒１～２名と $a<0$ の場合について調べてきた生徒２名の，合わせて３名または４名のグループとした。このグループで上記課題に取り組んだ。

⑶　指導計画

比例

①　関数（２時間）

②　比例の式（３時間）

③　座標（１時間）

④　比例のグラフ（３時間）

本実践は④の１，２時間目に位置づく学習である。

⑷　授業の概要

①　個人解決

まず，小学校で学習した比例のグラフについて全体で確認した。その後，x の変域が $x<0$ の範囲で比例のグラフをかいたら，どのようになりそうかを予想させた。予想に続き，教科書 p.139 問１を用いて，$y=2x$ のグラフが直線になることを全体で確認した。$y=2x$ のグラフが既にかかれているワークシートを配布後，EG で集まり，$a>0$ の場合を調べるグループでは，$y=3x$，$y=4x$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{1}{3}x$ のグラフを１人１つかくように分担し，$a<0$ の場合を調べるグループでは，$y=-2x$，$y=-3x$，$y=-4x$，$y=-\frac{1}{2}x$ のグラフを１人１つかくように分担を決めさせた。分担が決まったところで各自担当することになったグラフをかき，課題に取り組んだ。

②　エキスパートグループでの活動

担当した比例のグラフを全員がかけたところで個別解決を終え，グループでの活動に移る。ここでは各自がかいたグラフをグループで確認し，それらのグラフを観察し，EG での課題に取り組んだ。早く終えたグループには，グラフに見られる特徴を，式を用いて説明することができないかを考えさせる。例えば，グラフが原点を通ることを式を用いて説明することができないかを考えるようにさせる。比例定数の変化によってグラフがどのように変わるかということがつかみにくい場合には，生徒たちがかいたグラフをワークシートごと重ね，日にかざして見る。こうすることで，比例定数を変化させたときに，グラフがどう変化するかを気づかせることができる。このグループ活動の中で，グループの構成員それぞれが見出した内容について理解し，次の JG の活動の中で説明ができるようにすることが求められる。

> このグループ活動で見つけられる事柄の例
>
> $a<0$ の場合
>
> ・グラフが直線
>
> ・原点を通る
>
> ・グラフが右へ行くと下がる　など

EG の活動までが第１時での学習である。

③　ジグソーグループでの活動

第２時の導入場面では，EG で集まり，前時の内容を確認する時間を５分程度とる。その後，JG になり第２時の学習に取り組む。このグループでは，まず，それぞれが EG で得た情報を説明し，他のメンバーに伝え，

情報を共有することが行われる。それをもとにして，JG での課題に取り組む。この活動を通して生徒たちは次のようなことを見つける。

このグループ活動で見つけられる事柄の例

$a>0$，$a<0$ に共通する

- ・グラフが直線
- ・原点を通る
- ・a の値が変わるとグラフの傾き方が変わる

$a>0$，$a<0$ で異なる

- ・$a>0$ だと右へ行くと上がる
- ・$a<0$ だと右へ行くと下がる
- ・$a>0$ だと a の値が大きくなると，グラフは急になるが，$a<0$ だとグラフは緩やかになる。

JG での活動が早く終えてしまっているような場合には，なぜそのようになるのか理由まで含めて考えるようにさせる。

④　全体での共有

JG の活動で分かったことを全体で共有する。ここでは，全体で押さえておきたい内容や考え方を意図的に取り上げることも必要となる。例えば，上に例として示した JG で見つけられる事柄では「$a>0$ だと a の値が大きくなると，グラフは急になるが，$a<0$ だとグラフは緩やかになる。」というように，$a>0$ の場合と $a<0$ の場合では，グラフの傾きの変化の仕方が異なるとしている。しかし，ある JG では，これらを同一のものとしてまとめていた（図２）。

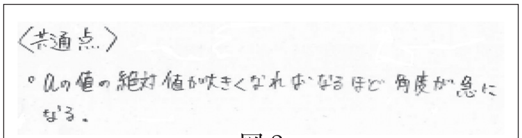


図２

このグループでは a の絶対値に着目することで，別々のものとして捉えるのではなく，共通なこととして捉えられるとしている。例えばこのようなものは意図的に取り上げたい考え方である。また，内容としてこの場面で押さえておきたい事柄については意図的に指名し，発表させるようにする。例えば，$a>0$ のとき x の値が増加すると y の値も増加するから，グラフが右上がりになることや，$a<0$ のとき x の値が増加すると y の値は減少することから，グラフが右下がりになること，グラフがどの場合にも原点を通る直線になることなどは確実に押さえておきたい。

⑤　グループ活動における支援

机間指導では各グループに対して指導することになる。グループ活動にどの程度慣れているかにもよるが，グループ内での発表が進まない場合には，発表順を決めたり，発表の仕方をある程度決めたりすることも必要である。JG での活動が進まない場合には，例えば，「グラフの傾き方は比例定数が正の場合と負の場合ではどうなっているか」というように，視点を与えることも考えられる。

３．結び

現在，学習指導要領改訂に向けて作業が進められているが，中央教育審議会の算数・数学 WG の資料からもわかるように，算数・数学におけるアクティブラーニングの３つの視点からの授業改善が求められている。中学校数学ではこれまでも，この視点に立って授業が行われてきていることと思うが，今一度「深い学び」「対話的な学び」「主体的な学び」という３つの視点から授業を見直すことが必要となってきている。

授業例 3 ～「図形」領域～

オープンな問題を使ったアクティブ・ラーニングの授業

田村 潤一 ［東京都江戸川区立葛西中学校教諭］

1．はじめに

授業で「主体的な学び」「対話的な学び」「深い学び」を実現するため，今回はその教材として“オープンな問題”に目を向けてみる。オープンな問題とは「正答が一通りではなく，いく通りにも可能になるように条件づけた問題」のことであり，最後の答えがいく通りもある問題，答えを導く過程がいく通りもある問題，問題のつくり方がいく通りもある問題等は，すべて“オープンな問題”とよばれる。教科書「中学数学」をながめてみると，どの学年・領域の内容もオープンな問題が載っているが，図形領域は，他の領域と比べてより多くのオープンな問題が載っている。

そこで本稿では，本格的な図形の論証指導が始まる第2学年の図形領域に焦点をあて，教科書「中学数学 2」にあるオープンな問題を使ったアクティブ・ラーニングの授業例を挙げてみる。

2．アクティブ・ラーニングの授業例

平行四辺形の性質と平行四辺形になるための条件 1 ～ 3（平行四辺形の性質の逆）が成り立つことの証明を終え，条件 4「1組の対辺が平行で長さが等しい」が成り立つことを論理的に考察し，証明していく場面を考える。

平行四辺形になるための条件

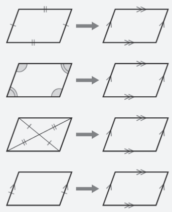
定理　四角形は，次のどれかが成り立つとき平行四辺形である。

1　2組の対辺がそれぞれ等しい。

2　2組の対角がそれぞれ等しい。

3　対角線がそれぞれの中点で交わる。

4　1組の対辺が平行で長さが等しい。

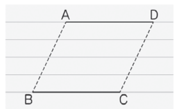


条件 4 を証明する前段階の活動として，教科書には，次のような最後の答えがいく通りもあるオープンな問題がある。

活動1　作図

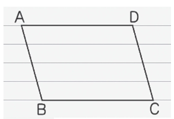
【教科書「中学数学 2」p.162　Q】

右の図のように，ノートの罫線（けいせん）上に等しい長さの線分 AD, BC をひいてみましょう。
このとき，点 A と B，C と D をそれぞれ結んでできる四角形 ABCD は，どんな四角形になるでしょうか。



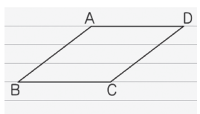
＜生徒の反応例＞

S1



平行四辺形

S2



ひし形

＜指導のポイント＞

教科書 p.162 Q にある図を観察するのではなく，生徒が自らの手で図をかき，それを観察して図形を見いだす個別活動である。

一部の生徒は，S2 のような AB ＝ AD の図をかいて「ひし形」と述べたり，∠A ＝ 90° の図をかいて「長方形」，もしくは AB ＝ AD かつ∠A ＝ 90° の図をかいて「正方形」と述べたりすることが予想されるので，教師の助言を通して上手に引き出したい。重要なことは，条件に合う図を自由にいく通りもかかせ，それらを発表させることで“多様な四角形がかける”事実を，生徒同士で共有させることである。

その後，次のような活動を通して，命題（条件 $\boxed{4}$）の生成へとつなげていく。

活動 2　発展

① 生徒のみなさんは，どんな条件に合う図をかきましたか。共通していえることを式で表しましょう。

② 図をかいた結果，いろんな四角形が完成しました。これらの四角形に共通していえることは何ですか。

＜①における生徒の反応例＞

S3「線分の長さが等しいから AD ＝ BC」

S4「罫線上に線分をひいたから AD//BC」

＜②における生徒の反応例＞

S5「2 組の対辺はそれぞれ平行である」

S6「2 組の対辺はそれぞれ等しい」

⋮

S7「平行四辺形の特徴と同じである」

＜指導のポイント＞

生徒同士の協働（グループワーク）を通して，仮定および結論の内容を数学的に洗練させる活動である。

各グループ，次のⅠ，Ⅱのようなディスカッションがなされているかどうかに注目しながら教師は机間指導をし，生徒同士の話し合いを深めさせたい。

(Ⅰ) S4 のように，ノートの罫線は平行であることに気づき，「AD//BC」を見いだそうとしている。

(Ⅱ) S7 のように，S5 や S6 等の意見を基に，図形の性質を統合させようとしている。

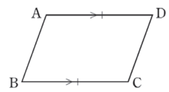
(Ⅱ)の話し合いを更に深めていくと，「ひし形・長方形・正方形は，どれも平行四辺形である」という，後に学習する“図形の包摂関係”を発見することにもつながる。どの程度まで発展させるかは，生徒の活動状況に応じて変えるとよい。

その後，各グループの発表を通して仮定，結論の内容を決定させたら，「これは予想にすぎない」と証明する必要性があることを理解させた上で，条件 $\boxed{4}$ の証明へとつなげていく。

活動 3　証明

【教科書「中学数学 2」p.163 問 5】

AD＝BC，AD∥BC である四角形 ABCD は平行四辺形になることを証明しなさい。



＜生徒の反応例＞　※証明の一部を抜粋

S8　対角線 AC をひく。

⋮

△ ABC ≡△ CDA

したがって，∠ BAC ＝∠ DCA

錯角が等しいから，AB//DC

仮定から，AD//BC

S9　対角線 AC をひく。

⋮

△ ABC ≡△ CDA

したがって，AB ＝ CD

仮定から，AD ＝ BC

S10　対角線 AC をひく。

⋮

△ ABC ≡△ CDA
したがって，∠ B =∠ D
同様にして，∠ A =∠ C
S11　対角線 AC，BD をそれぞれひき，
その交点を O とする。
⋮
△ AOD ≡△ COB
したがって，OA = OC，OD = OB

＜指導のポイント＞

平行四辺形の定義，もしくは平行四辺形になるための条件 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ のどれを用いても証明することができる，答えを導く過程がいく通りもあるオープンな問題である。

証明できない生徒に対して，教師は証明の手がかり等を助言する訳であるが，多様な考え方を妨げることがないよう，助言は「既習の平行四辺形になるための条件 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ を使って証明してもよい」や「2 つの三角形に着目してみるとよい」程度の内容で留めておきたい。重要なことは，証明を自由に記述させ，それらを発表させることで“多様な証明方法がある”事実を，生徒同士で共有させることである。

その後，次のような証明の振り返りへとつなげていく。

> **活動 4　振り返り**
> いろんな証明方法がありました。それぞれの証明を見て，よかったところやわかったことは何ですか。

＜生徒の反応例＞

「S9 のように，もう 1 組の対辺が等しいこと（AB = CD）だけを示せばよいという考え方は，とてもわかりやすい」

「私も S10 と同じ条件 $\boxed{2}$ を使って証明してみたが，“同様にして”という言葉を使って省略しなかったから，証明が長くなってしまった」

＜指導のポイント＞

証明方法に優劣をつけるのではなく，他者の考え方や記述内容を観察することで，自身の証明を振り返る個別活動である。“仮定の使い方”や“記述の仕方”等に磨きをかけることができ，今後の図形の論証に生かすことができる。

3．おわりに

本稿の授業例は，『オープンな問題 → 発展 → オープンな問題 → 振り返り』という活動の流れで構成されている。オープンな問題を授業で取り扱う際は，“多様な答えがある”事実だけを共有して終わらせるのではなく，その後，振り返ったり数学的に発展させたりする数学的活動によって，「主体的な学び」「対話的な学び」「深い学び」が実現される。

教科書 p.172 ～ p.173 には，授業例のようなアクティブ・ラーニングができる図形の問題がたくさんある。その中には，問題のつくり方がいく通りもあるオープンな問題もある。教師は是非，授業で生かしたい。

【教科書「中学数学 2」p.173　章の問題 5】

> ▱ABCD で，辺 BC の中点を M とし，AM と DC をそれぞれ延長した直線の交点を E とします。このとき，次の問いに答えなさい。
> (1)　上の条件に合う図をかきなさい。技
> (2)　四角形 ABEC はどんな四角形ですか。また，そのことを証明しなさい。考
> (3)　(1)でかいた図から，証明の問題をつくりなさい。関 考

［引用・参考文献］
・島田 茂 編（1995）；新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案　東洋館出版社

授業例 4 ～「資料の活用」領域～

経験的確率を樹形図で検証しよう

高山 琢磨 ［東京都町田市立町田第一中学校主任教諭］

1．授業でアクティブ・ラーニングを実現するためのポイント

アクティブ・ラーニングは「深い学び」を実現するための手段である。教える場面と，生徒に主体的に思考，判断，表現させる場面の配分を意識した授業設計をする必要がある。生徒が主体的・協働的に問題を発見し解決する場面を，1時間の授業の中に意識的に用意しておく。主体的に学習するためには，生徒自身が知的好奇心をかき立てられるような，魅力的かつ身近な教材を用意することが肝要である。そして，話し合い活動を通して問題を発見し，解決方法を探り出すことで，主体的・協働的に問題を解決することが期待できる。ここでは，アクティブ・ラーニングを実現するポイントとして，以下の3点を考えてみたい。

① ペアワークと4人グループの使い分け

ペアワークは比較的簡単な問題の答えを見せ合う，簡単な実験を行うなど機動性を生かした取り組みに向いている。問題の解答を見せ合う際は，じゃんけんを行い勝った人が負けた人に説明する，そして，相手の説明が分かりやすかった人は挙手するようにいい，その中から指名し前にでて説明させるといった取り組みも考えられる。

それに対して4人グループは，4人の中に比較的数学が得意な生徒が含まれている可能性が高くなり，問題解決型の授業に適している。一方で，問題を理解している一部の生徒のみ発言し，話し合いが活発に行われない場合があるので注意を要する。全体的に学力が高く，話し合い活動を積極的に行うことができるクラス状況であれば，3人組の話し合いやジグソー法も有効である。

② 考えをまとめる方法

発表用ホワイトボードを用いて，4人が頭を突き合わせて意見を出し合う。その際，1人のまとめ役がマジックを握り，みんなの意見を聞きだしながらまとめていくことが理想である。ただ，課題の難易度が高い場合は，4人では必ずしもよい解が得られるとは限らない。その場合は，他の班を偵察する時間を与えるとよい。例えば「これから3分間は偵察してよい時間です。各班から1名は他の班を回ってみましょう」などと告げ，ヒントを得ることで，班の思考が活性化される。

③ 評価

アクティブ・ラーニングは，しばしばルーブリックを用いたパフォーマンス評価が有効であるといわれる。ルーブリックは授業前に生徒に示しておくことで，生徒の活動

も活発になる。また,クラス全体でパフォーマンス評価を行うことが難しい場合は，いくつかの班に限定して評価し，残りの班は次回の別の活動で評価することもある。

今回取り上げる確率の授業では，時間の許す限り,次の流れを大切にしたいと考える。

① 予想する ② 実験により経験的確率を求める ③ 実験結果を共有，統合する ④ 数学的確率を樹形図を用いて計算し，実験結果を検証する

(①⇒④⇒②⇒③の流れの場合もある)

2．教材例の紹介

教科書「中学数学 2」p.187 には次の問題が掲載されている。

2 枚の 10 円硬貨を同時に投げるとき，次の㋐〜㋒のどの場合が起こりやすいか予想してみましょう。 ㋐　2 枚とも表 ㋑　1 枚は表で，もう 1 枚は裏 ㋒　2 枚とも裏

① 予想する

まず，生徒に㋐，㋑，㋒の確率を予想させる。㋐と㋒の確率が等しいことは，ほとんどの生徒が予想できる。㋑の確率は，初めて確率を学ぶ生徒にとっては難しい問題である。

② 実験により経験的確率を求める

調べ方について，生徒に考えさせる。10 円硬貨 2 枚をどうやって投げるか。どのようにすると，たくさんのデータを集められるか。気をつけなければならないことは何か。生徒からの意見を大切にして実験を行うことが主体的な学びにつながる。授業で予想される意見として，

・10 円玉は紙コップに入れて，その中で振って表裏を確認する。
・ペアになって，1 人は投げる，もう 1 人は記録を担当する。
・1 つのペアが 20 回実施して，表裏 1 枚ずつになる回数を数え，黒板に記録する。

などが考えられる。生徒から出てきたアイデアをできるだけ採用し，生徒のやる気を高めたい。

③ 実験結果を共有，統合する

相対度数にばらつきがあることを確認したうえで,「この実験から確率を求めるにはどうしたらよいだろうか」と発問する。生徒からは,「すべてのデータを合計したらよいのではないか」との意見が出てくる。すべての合計から相対度数を計算すると，㋑の確率は 0.5 にかなり近くなることが分かる。

④ 数学的確率を樹形図を用いて計算し，実験結果を検証する

「これって本当にいつでも 0.5 になる？」と問いかけ，4 人に 1 枚のホワイトボードを配布して考えさせる。「グループで樹形図をかいて，表裏 1 枚ずつになる確率を求めてみましょう」といい，グループによる話し合い活動に移行する。2 枚の硬貨を区別することで，確率が$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$であることを樹形図を用いて確かめる。

次に「じゃんけんの確率」の問題である。教科書 p.196 の問題 3 を生徒に考えさせる。

A，B，C の 3 人で 1 回だけじゃんけんをするとき，次の問いに答えなさい。 (1)　A が 1 人だけ勝つ確率を求めなさい。 (2)　A が 1 人だけ負ける確率を求めなさい。 (3)　3 人があいこになる確率を求めなさい。

この問題を樹形図を用いて解いたあとで，次の発問を行う。

2人でじゃんけんをするとき，あいこの確率は$\frac{1}{3}$です。3人のじゃんけんのときも，あいこの確率は$\frac{1}{3}$でした。
それでは，4人のときでも，5人のときでもあいこの確率は$\frac{1}{3}$でしょうか。

生徒は考え始める。
「5人でじゃんけんをしたらあいこになることが多いから，それはおかしいと思います」
「そうだよ，だから多い勝ち註) をやるじゃん」
という意見が出される。

●4人でじゃんけんを行うときと，5人でじゃんけんを行うときでは，どちらの方があいこになる確率が大きいと思いますか？

多くの生徒が，4人のときよりも5人のときの方があいこの確率が大きいことを経験的に理解している。

●どうやって，確率を求める？

「実験じゃない？」という意見から実験をすることになった。教科書 p.181 のさいころの実験を思い出させる。「さいころの1の目の出る回数を実験で求めましたが，じゃんけんのあいこの確率はどういう実験をすればよいかな？」といい，「4人と5人のグループを作って10回じゃんけんを行い，あいこの回数を数えればよい」との意見を引き出す。「黒板に4人と5人のあいこのデータをそれぞれ書いていけばよい」とのアイデアが生徒から出た。そして，「グループも途中で組み替えた方がよいのでは」との意見も出された。

●実験方法はどうする？

今までに何回か確率の実験を行っているので，生徒からは「4人班と5人班でじゃんけんを10回行う」「各班の結果を黒板で共有する」「各班の結果を合計して，あいこになる場合の相対度数を求める」という意見が出てくる。

実際に，実験からあいこになる場合の相対度数が4人の場合は 0.48 に，5人の場合は 0.62 となり，それぞれ$\frac{13}{27}$と$\frac{17}{27}$にかなり近い値が得られた。

●実験以外に確率を求める方法はある？

生徒から樹形図を書けばよいという意見が出てくる。ホワイトボードを4人グループの席の真ん中に置いて，樹形図を書かせる。起こりうるすべての場合を「もれなくダブりなく」書き出させる。

樹形図により，4人の場合の確率$\frac{13}{27}$を求めることができた。5人の場合の$\frac{17}{27}$を求めるのはかなり大変ではあるが，意欲的な生徒にはチャレンジさせたい。

●ほかにも確率を求める方法はあるかな？

2人のじゃんけんでは，排反事象を用いて確率を求めることができたので，それを思い出させて3人のじゃんけんを考察させたい。

●4人でじゃんけんをして，勝敗が決まるのはどんなときかな？

「じゃんけんで勝敗が決まるのは，全員が2つの手に絞られたとき」であることに，体験をもとに論理的に気がつけばよい。

3．おわりに

確率の授業で実験を取り入れることは，確率と統計を意識的に結び付けるよい機会である。さらに，実験方法を考えたり，実験結果を解釈したりする学習活動は，「対話的な学び」や「主体的な学び」につながるものである。今後も，アクティブ・ラーニングの視点から，実験を取り入れた授業について研究していきたいと考えている。

註）「多い勝ち」とは大人数のじゃんけんで行うもので，3種類の手のうち一番人数の多い手を出した人が勝ちというルール

連載：数学的活動へのイノベーション

続・『算額』の探究

吉野　茂　［東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭］

１．はじめに

前回に続き，「算額」の問題について考えていく。

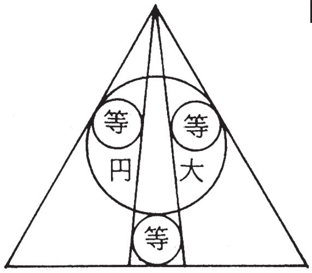
今回取り上げるのも前回と同様に，本校の中学３年生が昨秋に実施した奈良・京都への修学旅行の際に，Ｎくんたちの班（前回とは別の班）が入手した京都市東山区の清水寺の算額（明治25年奉納）の中の第１問である。この算額には，池内善之助，伊三郎兄弟が師匠である豊田周齋の追悼のために奉納したことが記されている。

清水寺は「清水の舞台」や「音羽の滝」などで有名であり，世界遺産に認定された古都京都の文化財17か所の１つにも選ばれている寺院である。残念ながらこの算額は一般公開されておらず，寺務所の倉庫に大切に保管されているようだ。したがって，Ｎくんたちの班も実物を見ることができたわけではないのだが，この班が事前にお願いしておいた「清水寺の清掃体験」の際に，担当して下さった方を通じて算額の写真の写しを頂くことができたのである。

２．問題の正しい図が判明

筆者もこの算額の存在は周知しており，例えば「近畿の算額」（近畿数学史学会編著，1992）には，図１のような図と文面が紹介されている。

図１



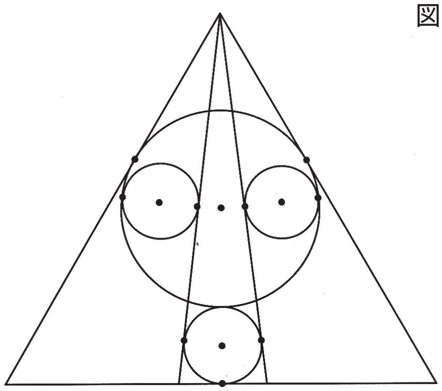
今有如圖三角内隔斜容大圓一個等圓三個
只云大圓徑一寸問等圓徑幾何
　答曰　等圓徑三分八厘有奇
術曰置一個七分五厘名甲自之加一個五分
開平方内減甲餘乘大圓徑得小圓徑合問
（注：原文は縦書きである）

算額の問題を解くときに，意外と苦労するのは「今有如圖…」の部分である。問題の条件の詳細がよくわからない場合があるからだ。この問題も，図１から読み取れる条件で問題を解こうとしても，「答」に至らないので，気になっていた問題の１つでもあった。

ところが，今回，Ｎくんたちの班が入手した写しを拡大してみたところ，何と図１の図が正確ではないことが判明したのである。写しの拡大図のままではぼやけて見に

くいので，本稿では筆者が新たに書き直したものを図２に示す。特に，接点部分を・で強調しておいた。

図２



この問題の意味はおよそ次のようになる。「正三角形の中にひかれた２つの線分により，大円１個と等円３個が図のように接している。大円の直径を１寸とするとき，等円の直径を求めよ。」

ちなみに，「答」は，「術文」と合わせると，以下のようになることが示されている。

甲＝1.75 とすると，

小円径 $=\{\sqrt{甲^2+1.5}-甲\}\times$ 大円径

$=\{\sqrt{1.75^2+1.5}-1.75\}\times 1$

$\fallingdotseq 0.38$

（註）「径」とは「直径」のことである。

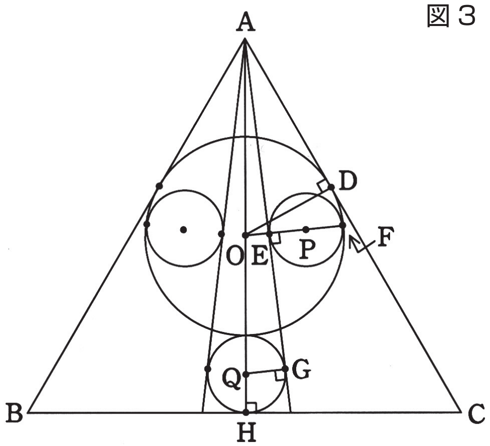
３．既習事項で解くことができるか？

前回も触れたが，現行の学習内容においては，２円の位置関係が中学校の学習内容に位置づけられていないので，この問題も解く過程で部分的に範囲外となってしまうのが難点である。したがって，そういった部分については，生徒の実態に応じた助言やヒントを適宜加えながら，解決に向けた探究を進めていく必要がある。

標準的な解答例を以下に示す。

図３のように点を定め，補助線として垂線 AH，大円の半径 OD，大円と等円の中心線 OF，等円の半径 QG をひく。また，小円の半径を x，大円の半径を y とおく。（大円の直径は１寸となっているので，文字におきかえなくてもよいのだが，「術」で小円径と大円径の関係を述べているので，ここでは一般的に解くことにした。）

図３



$\triangle AQG \backsim \triangle AOE$ となることに注目して比例式をつくると，$AQ : AO = QG : OE$

ここで，$\triangle ABC$ は正三角形だから，

$\angle DAO = 30°$ より，$AO = 2OD = 2y$

また，$OE = OF - EF = y - 2x$

さらに，$OQ = y + x$ であることから，

$(2y + y + x) : 2y = x : (y - 2x)$

これを整理して，$2x^2 + 7xy - 3y^2 = 0$

さらに，y は定数なので，x の２次方程式として整理して，$2x^2 + 7yx - 3y^2 = 0$

これを解いて，$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}y$

$0 < x < \dfrac{1}{2}y$ より，$x = \dfrac{-7+\sqrt{73}}{4}y$

となる。よって，小円の直径 $2x$ は

$2x = \dfrac{-7+\sqrt{73}}{4} \times 2y$ となり，$2y = 1$ のとき，

確かに $2x$（小円径）$\fallingdotseq 0.38$ となる。

後半の部分で，文字係数の２次方程式を解くことになるが，この部分が難しければ，方程式を整理した段階で，$y = \dfrac{1}{2}$ を代入して解いてもよいであろう。

4．もう一つの数学的活動

0.38という結果を得るまでにもひと苦労であったが，ここで気になったのが，我々が解いた「解」と「術」に示されている式との違いである。今回は，この部分も数学的活動の場面の1つとすることにした。

1.75や1.5は何を計算したものなのだろうか。小グループに分かれた検討が進んだ。

しばらくすると，いくつかのグループで $\frac{7}{4} = 1.75$ の関係に気づくことができた。根号の中の仕組みに気づくのには少し時間を要したものの，$\frac{7}{4} = 1.75$ の関係がヒントにもなって，最終的には多くのグループが無事に紐解くことができた。念のため，Sさんが発表した計算式を添えておく。

$$
\begin{aligned}
\frac{-7+\sqrt{73}}{4} &= \frac{\sqrt{73}-7}{4} = \frac{\sqrt{73}}{4} - \frac{7}{4} \\
&= \sqrt{\frac{49+24}{16}} - \frac{7}{4} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}} - \frac{7}{4} \\
&= \sqrt{(1.75)^2 + 1.5} - 1.75
\end{aligned}
$$

5．「和算に挑戦」へのチャレンジ

ところで，清水寺の算額の問題に取り組んでいた昨年の11月頃，前回も触れた，岩手県一関市博物館が主催している「和算に挑戦」への応募対策への準備をしていたところ，中級問題の過去問題の中に，今回取り組んだ算額問題と同じような手続きでできるものを見つけた。

中級問題は，「中学・高校生向き」となっているが，12月中に「三平方の定理」までの学習が終了していれば，中学3年生でも十分に取り組むことができ，応募可能である。

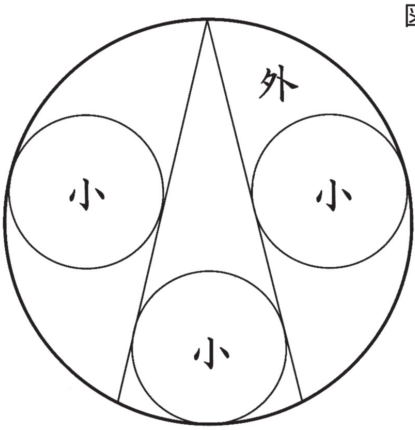
<平成26年度　中級問題>

外円内に，図のように合同な小円が3個入っています。弓形に接する左右の小円は弦の中点で接しています。

外円の直径が1寸のとき，小円の直径を求めなさい。（図4）

※文政13年（1830）年刊『算法新書』の問題をもとにしました。

図4



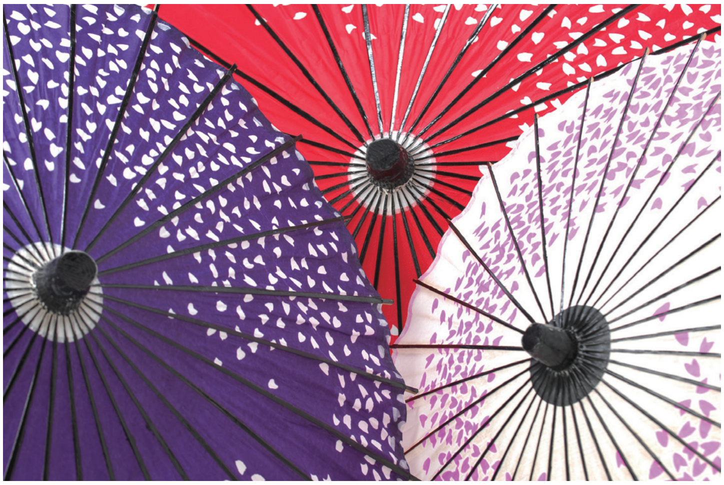
この問題も，適切な補助線をひくことにより，相似な三角形を見いだし，辺の相似比から大円径と小円径の関係式を導くと，2次方程式ができる。最後は，解を吟味して，答えは $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ となる。

清水寺の算額に取り組んだ生徒たちにとっては，よい復習問題になった。

6．おわりに

限られた授業時数の中で，あれもこれも取り上げるわけにはいかないと思うので，興味ある問題は，例えば「チャレンジ問題」として掲示し，レポート課題とするなどの工夫により，意欲ある生徒たちに提供していくという方法もあるだろう。

今年の「和算に挑戦」はどのような問題となるだろうか。3ヶ月後が楽しみだ。



和傘に見られる図形

中学数学通信　coMpass　〔2016年　秋号〕　2016年8月31日　発行

編　集：教育出版株式会社編集局
印　刷：大日本印刷株式会社

発　行：教育出版株式会社　代表者：小林一光
発行所：**教育出版株式会社**
〒101 - 0051　東京都千代田区神田神保町2 - 10　03-3238-6864（内容について）
URL　http://www.kyoiku-shuppan.co.jp　03-3238-6901（配送について）

なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は，科学技術の進展や国際化，情報化，高齢化などによって，今，大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で，人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには，人や自然を大切にしながら，共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは，この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め，社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社　〒060 - 0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445　FAX: 011-231-3509
函館営業所　〒040 - 0011 函館市本町6-7 函館第一ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886　FAX: 0138-31-0198
東北支社　〒980 - 0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391　FAX: 022-227-0395
中部支社　〒460 - 0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821　FAX: 052-262-0825
関西支社　〒541 - 0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221　FAX: 06-6261-9401
中国支社　〒730 - 0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033　FAX: 082-249-6040
四国支社　〒790 - 0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193　FAX: 089-943-7134
九州支社　〒812 - 0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100　FAX: 092-433-5140
沖縄営業所　〒901 - 0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411　FAX: 098-859-1411