中学数学通信　2017年 春号

コンパス coMpass

生徒の目が輝きだす
「授業で使えるパズル的・ゲーム的ネタ」

coMpass は教育出版が発行する情報誌です

教育出版

コンパス
coMpass
[中学数学通信]　2017年　春号

CONTENTS

「巻頭言」

〈特集〉生徒の目が輝きだす「授業で使えるパズル的・ゲーム的ネタ」

〈連載〉数学的活動へのイノベーション

巻頭言

遊びの中にも数学を

－数学の学習の楽しさ・よさを伝える－

山崎　浩二　［岩手大学教授］

学生の頃，マーティン･ガードナー著『数学ゲーム』に出会った。図書館には，シリーズのうちの何冊かが置いてあった。

面白かった。論理ゲーム，数や図形の手品のトリック，パラドックスや論理の間違い探し，不思議な立体づくりなど，まさに種々満載。ガードナー曰く，「巧妙なパズルをうまく解いたときに味わう歓喜と，専門の数学者がもっと高度な問題を解きおおせたときに味わう歓喜との間に大差はない」。当時，恩師から，欧米の数学の教科書には，このような題材がたくさん載っている，と聞いた時は，本当に衝撃を受けた。

子どもは元来，パズルやゲームが好きである。パズルには完成する楽しみ，ゲームには競う楽しみなどがあり，それぞれ夢中になる。そこに，数学的な要素を盛り込み，授業にすることができれば，数学そのものに対する興味・関心や考える力を高めていくことにもなろう。

実は，高等学校数学科の科目「数学活用」の学習内容には「遊びの中の数学」が示されている。学習指導要領解説にも「遊びは人間の本質的なものであり，文化を生み出す源である。数学と遊びにも深い関係があり，ここでは遊びを顕在する例として，論理的な思考を必要とする数理的なゲームやパズルなどを取り上げ，戦法などを考えさせることを通して論理的に考えることのよさを認識させるとともに，数学と文化のかかわりを理解させる」と書かれている。様々な国や地域の三目並べ，敷き詰めパズル，覆面算やハノイの塔などが例示され，これらの題材を通して，背理法や再帰的な考えなど論理的に考えることの楽しさやよさを実感することをねらっている。

数学的リテラシーに代表されるように，これからの数学教育は，生涯にわたって必要となる素養や汎用性まで言及される。数学のよさを多面的に見ていくことは，今後，小・中・高等学校でも求められていくであろう。

このような題材や活動が，単なる「遊び」に終始しないよう，以下のことには留意したい。

- 内在する数学的な内容が有意義なものか
- 内在する数学的な見方・考え方には汎用性があるか
- 内容の程度が生徒に適当か
- 生徒がやる気を起こすに足るものか

よい題材をもとに，数学的な価値を見いだすことができれば，生徒は，心から楽しむだろう。知的な好奇心も喚起され，数学の楽しさ，大切さを実感するはずである。中には，学習内容の理解をより確かにしてくれるものもあるだろう。みんなで知恵を出し合ったり，考え合う機会を仕組むこともできるかもしれない。

本誌での教材開発にぜひとも期待したい。

ネタ その1

数の対戦ゲーム

須田 学 ［筑波大学附属駒場中学校・高等学校教諭
東京理科大学非常勤講師］

1．はじめに

2人で先手，後手を決めて対戦する数に関するゲームを紹介する。実際にゲームを繰り返し行い，必勝法を考えることで，数の性質について自然と学べる。さらに，ゲームのルールを変えて必勝法を見直すことで，より深い理解へと繋がる。

2．ゲームのルールと具体例

ゲーム1　1から始めて，2から9までの好きな自然数を交互に掛け続けて，最初に100を超えた人が勝ちです。同じ数を何度掛けても構いません。

例）先手と後手が交互に，3，3，2，6を選んだ場合，1→3→9→18→108となるので，後手の勝ちである。

ゲーム2　29から始めて，その数の約数を交互に引き続けて，最初に0になった人が負けです。

例）先手が29の約数である1を選んで引くと28になり，後手がその約数である4を選んで引くと24になる。さらに，先手は24の約数を選んで引き，引いた後の数に対して後手，先手が同じことを繰り返していく（29→28→24→…→0）。

ゲーム3　1から10までの番号を1つずつ書いた10個のマス目と10枚のコインを準備して，交互にコインを好きなマス目に裏表を決めて置いていきます。次に，1から10までの好きな自然数を交互に選び，その数の倍数のマス目のコインを全て裏返す作業を繰り返します。ただし，異なる数を選んで，10回の作業をします。すべての作業が終わった後に，表が多ければ先手の勝ち，裏が多ければ後手の勝ちとします。

例）表を○，裏を×で表す。コインを交互に置いた段階で次の表の2行目だったとき，先手が5，後手が3を選んだとすると，表のように表裏が推移する。残り8回の作業を繰り返して，表，裏の数で勝敗を判断する。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
始	○	○	×	○	×	○	○	×	×	○
5	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×
3	○	○	○	○	○	×	○	×	○	×
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

3．授業の流れ

それぞれのゲームで2人組を作り，生徒に先手と後手を決めさせる。例えば，じゃんけんをして，勝った方が先手か後手か選ぶよう指示する。何回かゲームをしてみると，生徒から自然にどのようにすれば勝て

るのか声が聞こえてくる。その声を取り上げながら，生徒と共に必勝法を考えていく。また，適当に数字を変えてルールを変更したゲームでも必勝法を考察する。

(1) ゲーム１の必勝法とルール変更

「9を選べるので，12以上で手番が回ってくれば108以上になって勝てる」，「そのためには，相手の手番で最も小さな2を掛けたとしても12以上になればよい」，「ただし，相手の手番で最も大きな9を掛けたとき，100を超えてはいけない」などの声をまとめると，相手の手番で回ってくる数をxとして，連立不等式$2x \geqq 12$，$9x \leqq 100$を解くと，$6 \leqq x \leqq \frac{100}{9}$なので，
$x = 6, 7, 8, 9, 10, 11$を得る。よって，先手が初手で6～9のいずれかの数を1に掛ければ，6～9で後手の手番になり，後手がどの数を掛けても先手が勝てる。

100では必勝法を見つけるのは比較的簡単なので「最初に1000を超えた人が勝ち」とルール変更してみる。以下の連立不等式を考えて，相手の手番に渡す数が4～6，56～111であれば勝てることが分かるので，先手が初手で4～6のいずれかの数を選べば，先手が勝てる。ただし，56～111については，$x \times 2 \times 9 > 1000$，$9x \leqq 1000$を解いて，4～6については，$56 \leqq x \times 2 \times 9 \leqq 111$が必要であることなどから得られる。ここでも先手必勝となったが，後手必勝となるようなルール変更も存在する。

(2) ゲーム２の必勝法とルール変更

「29の約数は1と29しかないので，先手の初手は1で，後手の最初の手番は28で回ってくる」，「素数で手番が回ってくると，1を引く手のみになってしまう」，「約数の多い数では手がいろいろ選べる」，「1で手番が回ってくると，約数が1しかないので，$1 - 1 = 0$となって負けてしまう」などの声はすぐに出てくるだろう。一方で必勝法はなかなか見つからないかもしれない。そのときは，ヒントとして偶数と奇数に注目させるとよい。「奇数の約数は奇数のみなので，奇数で手番が回ってくると，偶数で手番を渡すことになる」，「偶数の約数は偶数と奇数の両方あるので，偶数でも奇数でも手番を渡せる」に着目すると，偶数で手番が回ってきた方が必ず奇数（少なくとも1が存在）の手を選ぶとき，偶数と奇数が交互に推移する。後手は必ず偶数である28で手番が回ってくるので，奇数の手を選び続ければ最終的に2で手番が回ってきて，1を選べば，先手は1となり，後手が勝つ。偶奇だけでなく，手番が移るときに数は小さくなることも注意しておきたい。

「60から始めて」，「2017から始めて」のようにルール変更したとして，順に先手必勝，後手必勝のように答えられれば，ゲームの本質を捉えられていることになる。

(3) ゲーム３の考察

何回かゲームをすると，順番にあまり意味がないことが分かる。例えば，すべて裏から始めたとすると，次の表のように，1，4，9のみが作業後に表に変わる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
始	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
終	○	×	×	○	×	×	×	×	○	×

これらは約数の個数がそれぞれ1個，3個，3個であり，裏返しは奇数回である。一方，その他の数の約数は偶数個であり，裏返しも偶数回である。つまり，平方数のみ，表裏が変わることになる。よって，互いにうまくコインを置くと，作業後に表5枚，裏5枚となり，引き分けになる。

4．おわりに

3つのゲームは，連立一次不等式，約数と偶奇，平方根の約数の個数に繋がるものであり，必勝法は結論からさかのぼって考察した。同様な数のゲームに興味のある方は，下記の参考文献もぜひ参考にして欲しい。

［参考文献］

・ドミトリ・フォミーンほか(著)，志賀浩二ほか(訳)(2012)『やわらかな思考を育てる数学問題集１～３』岩波書店

ネタ その2

和算を題材にした実践事例

小石沢 勝之 ［筑波大学附属中学校教諭］

1．はじめに

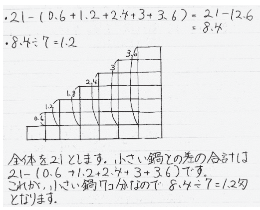
和算で扱われる題材の中には，算術的な方法による解決と方程式による解決のように２つの解法を比べられるものや，具体的な操作だけで終わらずに一般化できる題材が多い。問題についても特徴的な表現が多く，算術的な題材が当時の庶民の娯楽であったようにゲーム的な要素も多く含まれており，数学的に解き明かすことによってそのネタが解明される。本事例では，入れ子算（いれこざん）と薬師算（やくしざん）を取り上げ，授業で扱った内容を紹介する。

2．入れ子算

問題
７つの入れ子の鍋を銀 21 匁（もんめ）で買いました。入れ子を大きい順に並べるとその値段は 0.6 匁ずつ安くなっています。一番小さい鍋は何匁ですか。

〔算術的な解法の例〕

$6 \times 7 = 42$
$42 \div 2 = 21$
$21 \times 0.6 = 12.6$
$21 - 12.6 = 8.4$
$8.4 \div 7 = 1.2$



〔方程式による解法の例〕

一番小さい鍋を x 匁とすると，
次に小さい鍋は　$(x + 0.6)$ 匁
その次に小さい鍋は　$(x + 0.6 \times 2)$ 匁
……
全部の合計は

$$x + (x + 0.6) + (x + 0.6 \times 2) + \cdots$$
$$\cdots + (x + 0.6 \times 6) = 21$$
$$x = 1.2$$

授業では，両方の考え方による解法を要求し，それぞれの解き方についての感想は次のようであった。

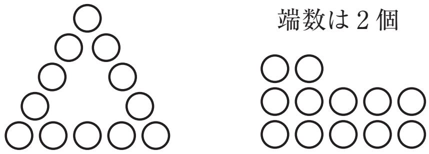
・方程式の方がラク
・方程式は式をつくれば解けるけど，算術的な解法は式をつくることができず解けなかった
・方程式は順番に式をつくるイメージ，算術的な解法は逆算するイメージ

和算による他の問題も扱っていたため，「算術はその場に応じていろいろな解き方がある」といった感想もあった一方で，両方の解決の仕方の違いに着目したり，方程式のよる解き方に好意的な感想を持ったりしていたのが印象的であった。計算が得意な生徒は方程式を学んでも，算術的な方法で解けてしまうが故に，方程式を利用するよさを感じられない場合も多い。このよう

な題材を扱うことで，両方の考え方の違いに気づいたり，方程式のよさに気づくきっかけを与えたりすることも，数学的な見方や考え方を育む上では大切なことであると考えられる。

３．薬師算

> 問題
> ◯で正三角形をつくります。正三角形の一辺を残し，残りの◯を残した辺の横に並べます。余った◯の個数を端数とよびます。端数の個数が分かると◯の総数が分かる理由を考えてみましょう。



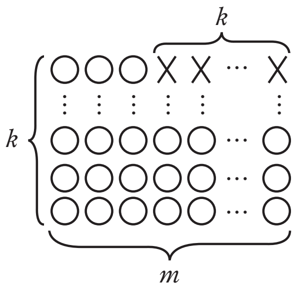
実際にいくつかの場合で調べてみると，表のような関係になっていることが分かる。

端数	1	2	3	4	5
総数	9	12	15	18	21

授業場面では，マグネットを使ったり図を描いたりして，端数が並ぶ列がいつも３個少ないことを帰納的に見いだせれば，総数をS，端数をaとすると$S = 3a + 6$という式がつくれる。式を見いだしたあとは，「一辺にm個の◯を正三角形に並べるとき，◯の総数はいくつになるか」のように課題を変え，一般的に扱うことができる。碁石やマッチ棒を数える課題の復習にもなり，既習を生かす場面にもなりうる。

また，薬師算は，生徒の実態に応じて様々な課題の提示の仕方や発展的な扱いができることがその特徴の一つである。例えば，最初に課題を提示する仕方も，並べ方を説明し，生徒側が出した問題に対して教師が答えるという形式をとることも考えられる。教師が常に正解を出すことができるので，生徒は不思議に思うだろう。また，正三角形の場合だけでなく，正方形や正五角形に拡張することも考えられる。当時においても『和国智恵較（わこくちえくらべ）』では三角形の挿絵に対し，『塵劫記（じんこうき）』では正方形が図示されている。

その際には，一辺の◯の数について正方形は４個以上，正五角形は５個以上という条件が必要になり，問題の中に隠れている条件や文字の定義域を考えるきっかけにもなる。数学の得意な生徒に対しては，探究的な課題として，「正k角形のときの◯の総数Sを，kと端数aを用いて表しなさい」という課題も考えられるだろう。



『和国智恵較』の挿絵

正方形の場合は　$S = 4a + 12$

正五角形の場合は　$S = 5a + 20$

正k角形の場合は　$S = ka + k^2 - k$

となるが，式をつくる過程で，文字式に文字式を代入する計算の必要性に迫られたり，問題の条件を考えたりすることも必要になる。

４．おわりに

数当てゲームや魔法陣などに代表されるように，ゲーム的な要素を持つ題材は生徒の興味・関心をひきつけ，数学の苦手な生徒も取り組む契機となりうる。しかしながら，それをゲームだけで終わらせないためにも，その奥に潜んでいる数学的な特質を明らかにする活動を生徒の実態に応じて設定する場面が必要になる。このような場面を設定して，生徒の数学の世界を広げられるようにしたい。

ネタ その３

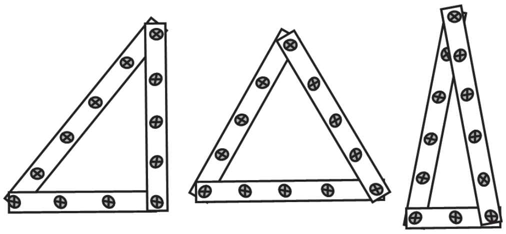
３年間の集大成 既習事項の活用で数学に感動させる

石川　和代　［東京都豊島区立千登世橋中学校指導教諭］

中学校３年生の授業がすべて終わった後，数学的活動を取り入れ，数学の楽しさやよさを実感できる授業の一つとして等周問題を紹介したい。

また，最初の活動では図のような教具を使うと楽しんで授業に入ることができる。（教具はロボット作り用のプラパーツ）

長さが 12 の三角形をつくってみよう。



周りの人と比べて，同じ三角形の人どうし集合しましょう。

①　３辺が（3，4，5）の三角形
②　３辺が（4，4，4）の三角形
③　３辺が（2，5，5）の三角形

代表の生徒は，黒板で三角形を実際につくる。

３つの三角形の中で一番面積が大きいのはどれでしょうか。

①の面積を求める（予想される反応）

・三角形の公式がわからない。
・どこを底辺と高さにしていいかわからない。
・三平方の定理の逆を利用して，３辺が（3，4，5）の三角形は直角三角形だということに気付く。

$3\times4\times\frac{1}{2}=6$

②の面積を求める（予想される反応）

・どこを底辺と高さにしていいかわからない。
・ $4\times4\times\frac{1}{2}=8$ としてしまう。
・正三角形では，頂角から底辺に向かって垂線を引いて直角三角形をつくり，三平方の定理を利用して高さを出し，面積を求める。

$\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
$4\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

・正三角形では，頂角から底辺に向かって垂線を引いて直角三角形をつくり，$1:\sqrt{3}:2$ の辺の長さの比を使って高さを出し，面積を求める。

$4\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$

③の面積を求める（予想される反応）

・補助線の引き方がわからない。
・二等辺三角形では，頂角から底辺に向かって垂線を引いて直角三角形をつくり，三平方の定理を使って高さを出し，

面積を求める。

$\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$2\times2\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{6}$

面積を比較する（予想される反応）

・単純に4と6と2を比べて，6である①の面積が大きいとする。

・$\sqrt{3}$や$\sqrt{6}$の近似値がわからない。

・$4\sqrt{3}=4+1.73=5.73$としてしまう。

・$4\sqrt{3}=\sqrt{48}$，$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$，$6=\sqrt{36}$として比べる。

・$\sqrt{3}$や$\sqrt{6}$の近似値を求め，面積を比べる。

① 6

② $4\sqrt{3}=4\times1.73=6.92$

③ $2\sqrt{6}=2\times2.44=4.88$

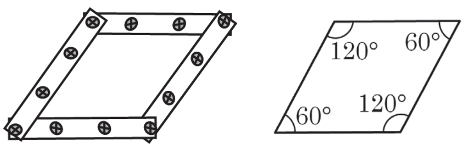
答え ③＜①＜②

ここまでは，３人か４人のグループで活動させ，わからないグループは他のグループに偵察に行けるようにすると解決できる。

≪発展課題≫

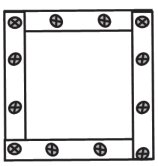
> 長さ 12 で正三角形より面積の大きい図形をみつけなさい。
> 長さ 12 で一番大きな図形を見つけなさい。

ひし形（右下のひし形で考えると…）



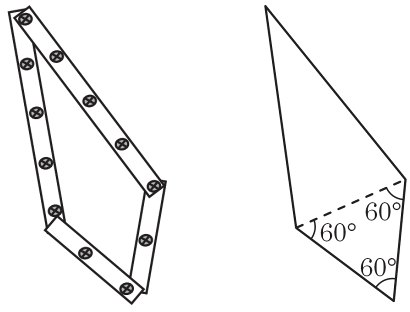
$3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}=7.79$

正方形



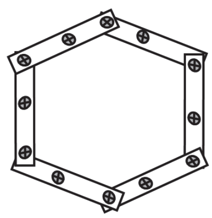
$3\times3=9$

たこ形（右下のたこ形で考えると…）



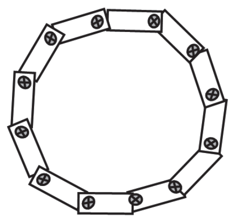
$\sqrt{3}+\sqrt{15}=1.73+3.87=5.6$

正六角形



$6\sqrt{3}=10.38$

正十二角形



$\frac{2+\sqrt{3}}{4}\times12=11.19$

ひし形やたこ形では，既習事項を利用して面積を求められるように，角の大きさを決め，特定の場合のひし形やたこ形を考えさせるようにする。他に平行四辺形や長方形などが考えられる。発展課題は生徒の実態によって取り扱い方を変えるとよい。

まとめていくと，「周の長さが一定な多角形のうち，面積が最大なものは正多角形であり，周の長さが一定な図形のうち，面積が最大なものは円である。」ということが直感的にわかる。

証明は中学校数学では扱えないが，こうした作業からも数学の面白さを感じることはできる。

また，最初の作業でできた三角形が３種類しかないことや面積を出す場面で既習事項が活用できることでも感動できる教材である。

ネタ その4

「紋切り遊び」の秘密を探ろう

田中 真樹子 [茨城県つくば市立桜中学校教諭]

1．はじめに

紋切り遊びは，江戸時代から伝わる日本の遊びの一つである。紙を折り，型に沿って切り抜いた後，紙を開くと，着物の柄から家紋まで，生活のさまざまな場面で昔から使われてきた文様ができあがる。できた文様の形は，時に型紙から想像しづらいものもあり，その意外さが面白い。

1年生の数学では，図形の移動について学習する。なかでも対称移動（線対称）の考えは，作図や折り返し，最短距離を考えるときの図形の見方に欠かせないものである。そこで，紋切りあそびの楽しさに触れながら，対称移動を繰り返してできる図形について考察する機会を作りたいと思い，本授業を設定した。

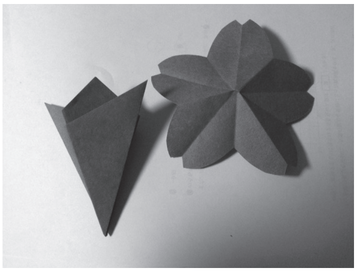
2．授業の流れ

①　課題提示

［課題1］　折り方を工夫して，ワンカットで桜を作ろう。

実際に大きな折り紙を使って折って切り抜いた桜を提示した。各自に折り紙を3枚ずつ配り，まずはノーヒントで桜づくりに挑戦する時間を作った。

生徒たちはすぐに紙の折り目に着目して，どのように折ればよいのか工夫を始めた。黒板に貼ってある桜の折り目を考察する生徒もいた。4つや8つの花弁はできるのに，きれいに5枚の花弁で構成される図形を自力で折るのは難しい。活動は，お互い相談したり情報交換したりできるようにグループにして活動した。



②　紋切り遊びに潜む数学について考える

机を一度元に戻し，種を明かし，五つ折りの折り方を説明した。折るときに36°を測るのが難しいため，ワークシートに36°の線を入れておき，重ねて使えるようにした。桜の形を作ってみたところで，次の課題を提示した。

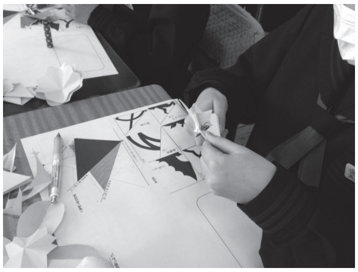
［課題2］　どんなことがいえるのだろうか。

切った後，開く前の形と開いた後の形を比較すると，五つ折りのしくみが，見えてくる。切り取ったパーツが対称移動をくり

返して桜の形ができていること,「線対称」「対称移動」がキーワードになることを生徒の言葉で確認していった。「なぜ36°で折るのか」と聞くと,「型紙が10個分で1つの形ができているのだから，360÷10 = 36で，36°になる」という考えが挙げられた。

③　紋切り遊びを体験する

江戸時代から伝わる紋切り遊びについて紹介した。対称な図形であれば,型紙を作って文様を作っていくことが可能であること,五つ折りのほかにも，四つ折り，三つ折り,二つ折り，一つ折りがあることを伝えた。それぞれの折り方の紋切りの型紙を用意し,好きな紋を切り抜いてみるように指示した。



できた紋はワークシートに貼り，どのような形がもとになってできているかを考察するように指示した。生徒たちは型紙の形と出来上がった紋の美しさと意外さに驚き,紋切り遊びを楽しみながら，先の学習を振り返っていった。

④　発展

時間に余裕があれば，オリジナルの形を考えたり，型紙を作ってみたりする活動を取り入れると，さらに理解が深まると考えられる。

3．おわりに

図形の学習では，頭の中で図形が動くところを想像したり，動かしても変わらないものを考察したりする力を伸ばしたい。そのために，デジタル教科書や作図ソフトなどを使って図形の理想的な動きを見せていくのも一つの方法である。一方，今回の授業のように実際に手を動かして図形に触れたり考えたりする活動も図形を捉える一つの効果的な方法であると考える。この後の作図の学習では，作図の仕組みを考える際に，線対称であることや，線対称と判断するための図形の性質の理解が求められる。また，点を対称移動して最短距離を探す問題など，対称移動が鍵となる問題に取り組むときに，実際に手を動かして考察した経験が,「対称移動して考える」という発想を生む手助けとなるのではないかと考える。今後も操作活動を通して学習する機会を,授業の中に意識して取り入れていきたい。

［参考文献］

・下中菜穂（2008）『いろはにもんきりあそび』エクスプランテ

連載：数学的活動へのイノベーション

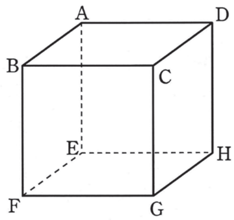
一般化すると見えること

吉野　茂　[東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭]

1．はじめに

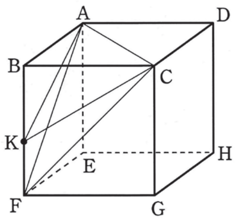
現在使用している中学校１年の教科書に，図１のような立方体の３つの頂点を結んでつくった三角形が直角三角形になるものを考える場面がある。（１年６章 p.232「章の問題」）

図１



また，中学校２年の教科書には，図２のように，立方体の切り口である△ACF や△ACK がどんな三角形になるかを説明する活動を行う場面がある。（２年５章 p.175「ジャンプ」）

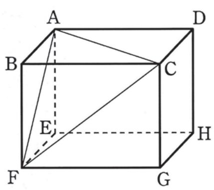
図２



これらについては，３年生になって三平方の定理を学べば，その面積も求めることが可能であり，これらは高校入試問題においても頻出事項の１つとなっている。

しかし，題材が図３のように直方体になると，中学生にとってはなかなか難しい課題となる。

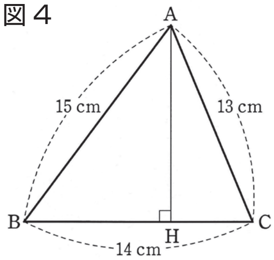
図３



例えば，図３の３点 A，C，F を結んでできる△ACF は，一般的には不等辺三角形になるからだ。

しかし，不等辺三角形であっても，三角形の３辺の長さがわかっているときには，三平方の定理を使ってその面積が求められることを理解することは大切で，このことは中学校３年の教科書（３年７章 p.217「章の問題」）にも登場する。ただし，深入りはせず，図４のように３辺とも整数でかつ高さも整数になるように準備された限定的な場合の考察であり，一般的には高校における三角比に関する定理の学習を待つことになる。

図４



したがって，高校入試において出題する場合，例えば図３においては，AB ＝ BF のような条件をつけて，対象となる三角形が二等辺三角形になるように工夫しているものが多い。

しかし，公立高校の入試問題の中には，不等辺三角形になる切り口の面積について，うまく誘導しながら求めさせることに挑戦したものもある。前置きが長くなったが，今回はこのような問題について考察してみたいと思う。

２．切り口が不等辺三角形となる面積

右下の図（図５）のように，AB = 2cm，AD = 3cm，AE = $2\sqrt{3}$cm の直方体があり，点 A から線分 BE に垂線をひき，BE との交点を P とする。このとき，(1)，(2)の問いに答えなさい。＜ 2013 佐賀県＞

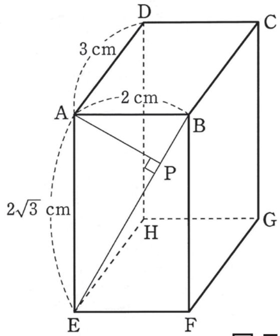


図５

(1)　△BDE の面積を求めるために，次のように考えた。このとき，ア～エ およびカにあてはまる数を，オにあてはまる記号を書きなさい。

> BE = ア cm なので，AP = イ cm となる。
> △ADP において∠DAP = 90° なので，
> DP^2 = ウ cm …①
> また，BP^2 = エ …②，BD^2 = 13 …③
> ①，②，③より $BD^2 = BP^2 + DP^2$ が成り立つので，△BDP は∠オ = 90° の直角三角形である。
> よって，△BDE の面積はカ cm^2 となる。

(2)　三角すい ABDE について，△BDE を底面としたときの三角すいの高さを求めなさい。

以下，誌面の都合上，本稿では上記の(1)についてのみ考察する。

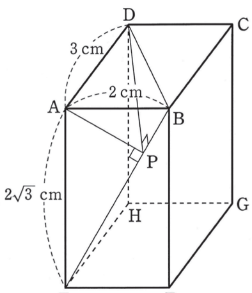


図６

図６に示したようにこの問題で対象となる△BDE は不等辺三角形であり，しかも，辺の長さには根号がついた数も含むので，うまく計算を進めないと大変である。

この入試問題の誘導のポイントは，三平方の定理の逆を用いて，△BDP が直角三角形になることから，DP ⊥ BE を導き，三角形の面積の公式を用いて△BDE の面積を求めている点である。

３．一般化してみよう

DP ⊥ BE はいつでもいえることなのだろうか。この点については，高校で学ぶ「三垂線の定理」を利用すれば明らかであるが，ここでは，入試問題の流れに沿って一般化をしてみよう。（図７）

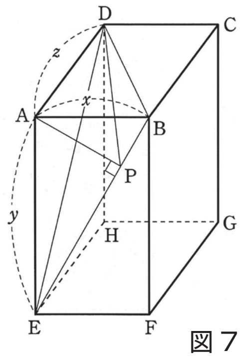


図７

右の図のように，AB = x，AE = y，AD = z とおくと，

BE = $\sqrt{x^2+y^2}$

となる。

また，AP については「相似の考え」か「面積」に着目すると，

AP = $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ となる。

さらに，

$$DP^2 = \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2+y^2} \quad \cdots①$$

$$BP^2 = \frac{x^4}{x^2+y^2} \quad \cdots②$$

$$BD^2 = x^2 + z^2 \quad \cdots③$$

となり，①，②，③より

$$\begin{aligned} &BP^2 + DP^2 \\ &= \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}{x^2+y^2} \\ &= x^2 + z^2 = BD^2 \end{aligned}$$

よって，△BDP は確かに∠BPD = 90° となる直角三角形であり，DP ⊥ BE とな

ることが証明できる。

したがって，△BDEの面積は

$$\frac{1}{2}\times \mathrm{BE}\times \mathrm{DP}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\times\frac{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}\quad\cdots※$$

となる。

4．一般化して見えるもの

一般化して得られた結果は，思いの外きれいな式となったが，もう少し整理すると次のようにもまとめられる。

$\triangle\mathrm{BDE}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$ の両辺を2乗すると

$$(\triangle\mathrm{BDE})^2=\left(\frac{1}{2}xy\right)^2+\left(\frac{1}{2}yz\right)^2+\left(\frac{1}{2}zx\right)^2$$
$$(\triangle\mathrm{BDE})^2=(\triangle\mathrm{ABE})^2+(\triangle\mathrm{ADE})^2+(\triangle\mathrm{ABD})^2$$

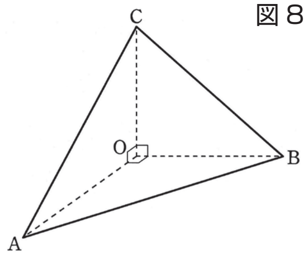
すなわち，「頂点Aに3つの直角が集まる三角錐ABDEにおいて，直角を含まない面△BDEの面積の2乗は，他の3つの直角三角形の面積の2乗の和に等しい」という関係があることがわかる。

結果を得るまでの途中の計算式には，分数式など一部に中学校の学習範囲を超えてしまうところもあるように思うが，丁寧に導けば，中学生にも理解させることはできるであろう。

5．デカルト・グアの定理

今回考察の対象となった立体，すなわち，1つの頂点に3つの直角が集まっている三角錐を「3直角四面体」と呼ぶことがある。（図8）

図8



また，「3次元空間におけるピタゴラスの定理」ともいうべき今回の結果は，実は，古くから知られている定理で，日本では，「デカルト・グアの定理」と呼んでいる。（註：外国の文献には「De Gua's theorem」と表現されているものを多く見かける。）

＜デカルト・グアの定理＞
四面体OABCにおいて，
$\triangle\mathrm{OAB}=S_1$，$\triangle\mathrm{OBC}=S_2$，$\triangle\mathrm{OCA}=S_3$，
$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とする。
∠AOB，∠BOC，∠COAが90°のとき，
$$S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$$
が成り立つ。

今回は，入試問題の流れに沿った証明を試みたが，図5の点Pを使わずに，点Dから直接BEに垂線をひいた垂線の足を利用し，図4の考え方にしたがって，△BDEの面積を求めることもできる。

この定理を証明によって導くことが難しい生徒に対しては，具体的な数値の立体をいくつか扱うことを通して，この定理の不思議さを味わわせることもできるであろう。

ちなみに、三平方の定理とは違い，この定理の逆は成り立たないことも興味ある課題の1つである。

6．おわりに

中学校3年間の学習の中には，文字を使うことによって，具体的な数値の計算では見えない構造を確認する場面がいくつかあるが，今回考察した題材もその1つといえる。中学生にはやや難しい面もあるが，生徒の実態に応じてうまく導けば，思考力，判断力，表現力等を身に付けるためのよい教材にもなるのではないかと思う。今後の実践により教材研究を進めていきたい。

書籍のご紹介

『創造性と論理性を育む図形教材の開発とその指導　―教材のストーリー化―』

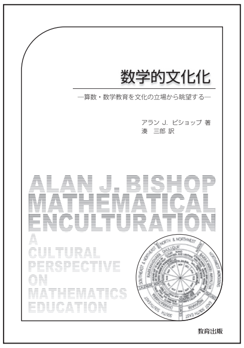
坂井 裕 著　　本体 2,400 円＋税

図形脳を育む指導法の工夫を
やさしく具体的な事例で紹介！

自ら課題を見いだし，自ら解決する力の育成は，今日的な課題であり，それに応えるための有力な題材として図形を取り上げる。新しい性質を見いだすための「意図的な考え」の指導方法を具体的な事例を通して示し，新しい性質どうしのネットワークを創る面白さを実感する図形の指導方法を提言する。

『数学的文化化　―算数・数学教育を文化の立場から眺望する―』

アラン J. ビショップ 著　湊 三郎 訳　　本体 4,000 円＋税



「数学」と聞くと
身震いが生じる……

数学恐怖症や多数の落ちこぼれを生み出す西欧の数学教育はどこに問題があるのか。ビショップ氏はこの問題を解き明かし，教師のあるべき姿に貴重な示唆を与える。

『数学的コミュニケーションを展開する授業構成原理』

金本 良通 著　　本体 3,800 円＋税

算数・数学の授業における
コミュニケーションの本質に迫る！

算数・数学の授業において数学的コミュニケーションを展開するための新たな理論を構築するとともに，数学的コミュニケーション能力を育成するための授業展開を考察し，その在り方を提言する。

書籍に関するお問い合わせ：教育出版販売部 TEL 03-3238-6965

影がつくる図形

中学数学通信　coMpass　〔2017年　春号〕　2017年3月31日　発行

編　集：教育出版株式会社編集局
印　刷：大日本印刷株式会社

発　行：教育出版株式会社　代表者：山﨑富士雄
発行所：**教育出版株式会社**
〒101‐0051　東京都千代田区神田神保町2‐10　03-3238-6864（内容について）
URL　http://www.kyoiku-shuppan.co.jp　03-3238-6901（配送について）

地球となかよし　教育出版　なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は，科学技術の進展や国際化，情報化，高齢化などによって，今，大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で，人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには，人や自然を大切にしながら，共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは，この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め，社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社　〒060‐0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445　FAX: 011-231-3509
函館営業所　〒040‐0011 函館市本町6-7 函館第一ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886　FAX: 0138-31-0198
東北支社　〒980‐0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391　FAX: 022-227-0395
中部支社　〒460‐0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821　FAX: 052-262-0825
関西支社　〒541‐0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221　FAX: 06-6261-9401
中国支社　〒730‐0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033　FAX: 082-249-6040
四国支社　〒790‐0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193　FAX: 089-943-7134
九州支社　〒812‐0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100　FAX: 092-433-5140
沖縄営業所　〒901‐0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411　FAX: 098-859-1411