コンパス coMpass

主体的な学びを生み出す導入課題

coMpass は教育出版が発行する情報誌です

教育出版

コンパス
coMpass
[中学数学通信]
2018年 秋号

CONTENTS

巻頭言

主体的な学びを実現するために

山崎　浩二　[岩手大学教授]

子どもたちの生き生きした姿のある授業は心地よい。子どもの多くの声が聞こえ，前向きな雰囲気のあふれる教室は，見ているものをも感動させる。しかし，必ずしもそれだけではない気がする。時には，真剣に考え，悩み続ける姿があちこちに見られるものもある。そんな時は，教室内は静かで，緊張感すら漂う。ところが，ひとたび，何か道筋が見え始めると，「あっ，そうか！」「なるほど！」と心の底からの声が湧き上がる。わかることや考えられたことの喜び，わかり合えたことや考え合うことを楽しむ姿がある。「楽しい」の語源は「魂が揺さぶられるような歓び」と言う。新たな世界が見えた心地よさ，その場を共有できた感激が，子どもたちを生き生きとさせる。

新学習指導要領では，「主体的・対話的で深い学び」による授業改善が提言され，算数・数学科では，「主体的な学び」を「生徒自らが，問題の解決に向けて見通しをもち，粘り強く取り組み，問題解決の過程を振り返り，よりよく解決したり，新たな問いを見いだしたりする」ことと示されている。これはすなわち，数学の学習を生徒にとってより魅力的でより確かなものにしていくことに他ならない。そのためのいくつかの視点を記してみる。

(1)　「問題意識」を高めること

課題や目的を持てるよう問題や問いかけを工夫してみる。それは教科書の問題を用いてもできる。大切なのは，教師が学習内容の必要性と意味とその本質まで弁え，問うべきことを問えるかどうかである。

(2)　解決に向かう「知恵」をつけること

例えば，問題文にある必要な数量の関係が取り出せず，解決できない生徒が少なくない。ならば，問題の条件が浮き出るよう，言い換えさせたり，図をかかせたり，条件や数値を易しいものに置き換えたり，既習を振り返ったりするよう示唆する。困った時にどうすればよいのかに寄り添い，知識だけでなく知恵をも身につける。その安心感が自ら学ぶ体力を育む。

(3)　「学びを深く」すること

数学の学びは，よりよい方法を探ったり，多様な考えを共有し伝え合ったり，問題を発展し統合したりするなどの数学的活動を通して深まる。問題の持つ本質もそこから見えてくる。「なぜだろう」「もっと上手い解き方ができないか」「もし…だったら」など，生徒が自らに問いかけていけるよう，時間をかけて育むことが大切である。

(4)　「学びを振り返り，価値づける」こと

問題意識に照らし，数学的な価値を顕在化させたい。次の学びの原動力ともなろう。

〔数と式領域〕
問題を工夫することから授業づくりを！

谷地元　直樹　［北海道教育大学（旭川校）准教授］

1．はじめに －決定問題の形で提示する－

私の現場経験では，導入課題は「問題」として提示してきた。１つの問題について考え，課題を解決する過程を通して，お互いに学び合いながら本時の目標を達成することが大切だからである。もちろん，そこには主体的・対話的な学びの場面がいくつも存在している。

問題の工夫の仕方は，次の通りである。

・決定問題の形で問題を与えることで，自分の考えに基づいた追究ができる。
・予想を基に考えたり他者と比較したりすることで，課題解決への意欲が高まる。

最初に提示する決定問題は，次のように大きく４つの形に分けることができる。

・「～はいくつか」　･･･ 求答タイプ
・「～はどれか，どちらか」･･･ 選択タイプ
・「～は正しいか」　･･･ 正誤タイプ
・「～はどんなことがいえるか」･･･ 発見タイプ

決定問題の一番の魅力は，問題把握が明確になることである。また，直観的に予想できたり，本時の課題につながりやすくなったりする。私は基本的に決定問題からスタートし，問題解決の授業を日常的に実践してきた。ここでは，２つの授業例を基に，主体的な学びについて紹介する。

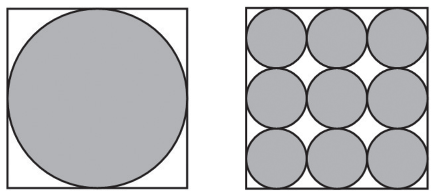
2．直観的な予想を基に課題を見いだす

第２学年の「式の計算の活用」では，文字を用いて問題を考察し，式を使って説明できることがねらいとなる。一方で，文字を用いた式操作に終始することがないように，与える題材を魅力あるものにしたい。

この授業では，２つの図形を比較する次の問題を設定している。

１辺が 18cm の正方形の中に下のように円が接している。このとき，ＡとＢで面積が大きいのはどちらだろうか？

【A】　【B】



正方形の図を黒板に貼り，その上に円を順に貼り付けながら図を完成させ，「どちらの面積が大きいだろうか」と口頭で問題を説明する。視覚的に大小関係をとらえさせ，予想の結果を挙手させていく。

この予想では半数程度の生徒が「同じ」と答えるので，学級全体でざわつきが起こる。そこで「この２つは本当に同じ面積になるの？」と発問し，まずは自分なりに考える時間を数分間与える。

机間指導をしながら，ノートに面積を求める式を記述させる。全体で確認すると，いずれも 81π cm^2 となり，面積が同じにな

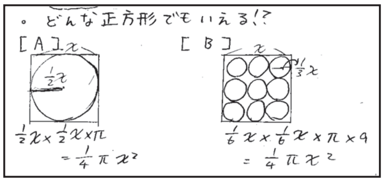
ることがわかる。そこで，次のようなやりとりを行い，課題意識を高めていく。

。比べてみよう
[A] 9×9×π = 81π (cm²) 同じ
[B] 3×3×π×9 = 81π (cm²)
1つの半径

S１：これって 18cm 以外ではどうなの？
S２：サイズが変わるだけだから，同じでしょ。
T　：確かに 18cm を使って，式をつくったね。
S３：別に何か文字にして調べたらどう？

ここで，「どんな正方形でも，ＡとＢの面積は同じになるのだろうか」と課題を提示する。一般化することの必要性を教師から改めて強調し，文字を用いて説明する必要性に気付かせることで，式で表して比較してみたいという気持ちが高まっていく。

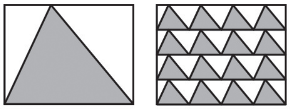
私の実践では正方形の１辺を x としたが，Ｂの円の半径を x としても解決できる。また，１つの変数で容易に立式することができるので，円は追究しやすい題材でもある。



本時の学習を深めるためには，正方形や円以外の図形に着目させていきたい。そこで，次のように話題を広げることにする。

S１：同じなのか。Ｂの隙間が小さく見えたな。
S２：確かにＡのほうが白い部分が多く思える。
S３：じゃあ，円を９個じゃなくて 16 個にしたときは？
T　：すごいね。同じって説明できるかな。
S４：これって，円って決まってるの？
S５：そこまで考えるなら正方形以外は？
T　：確かに他の図形がどうかも気になるよね。

話し合うことで，他の図形で試したいという気持ちが高まる。そこで，長方形の枠を貼り付け，16 個に分割した三角形について取り組ませていく。



文字を用いて説明する際には，Ｂの三角形の底辺を x，高さを y として式で表すことにする。このように文字を使って式を活用すると，図形の性質を一般化させて考えることのよさに気付かせることができる。なお，問題を発展させて台形で提示したり，合同ではなく相似な図形を中に隙間なく並べたりすることもできる。

こうして視覚的には判断がつきにくい図形を直観的に予想することで，面積がいつでも同じになることに驚きを感じる生徒が大勢いる。また，予想から「いつでも成り立つこと」を示す必要感が生じ，文字への抵抗感が薄れ，主体的に課題追究する姿が期待できる授業となる。

３．比較しながら考え合う場面を設定する

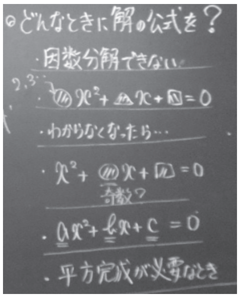
第３学年の２次方程式では，解を求めるためには解き方をどう使い分ければよいのかを判断できる力を養うことが大切である。目的意識をもった計算の場面を設定し，形式的な練習は避けるようにしたい。

この授業では，次の問題を設定している。なお，２次方程式の解き方については，前時までに解の公式までの指導を終えている。

> 次の①～④の中で，解の公式を用いたほうがよいものはどれか？
> ① $x^2-x-72=0$　　② $2x^2-3x+1=0$
> ③ $4x^2=9$　　④ $x^2-6x+7=0$

予想させて挙手させると，意見が分かれることから，「自分だったら？」「簡単なのは？」といった視点から，質問や話し合いが自然と生じてくる。そこで，因数分解や平方根の考え，平方完成や解の公式の４つの方法を用いて解を求めていく。

この授業のポイントは，解を求めることではなく，４つの解き方の使い分けである。そこで，ひと通り解き終えた段階で「解の公式はどんなときに使うの？」と問いかける。生徒は右のように，解の公式を使う場面をあげていく。

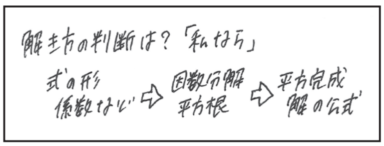


これまでは与えられた方程式を漠然と解いていたが，自分で判断して解決することが要求された生徒は，より簡潔な方法で解きたいと説明し始める。例えば，解の公式については，次のような盛り上がりを見せる場面がある。

Ｓ１：最初から解の公式でやるのはどう？
Ｔ　：そうなの？　解の公式なら必ず解けるね。
Ｓ２：いいけど，代入すると計算が大変そう。
Ｓ３：因数分解したほうが早いし，私はないかな。
Ｓ４：数値によっては代入がいいかも …。
Ｔ　：そう。a，b，c にあたる数を見て，判断すればいいのか。

相手の考えを批判的にみたり，具体的な反例などをあげて示そうとしたりする生徒が数多くいる。このようなやりとりには，主体的な学びの瞬間が数多く見えてくる。

この問題には正解はないが，生徒の中には効率よく解くことや手早く解くことは重視されていることが明らかとなる。そこを踏まえた上で，式の形に応じて判断することの必要性をまとめていく。



実際に教科書の問題を使いながら，自分ならどの考えを使って解くのかを瞬時に判断させる。教科書の練習問題は数値が工夫されているので，解き方で意見が分かれることがある。簡単に理由を問いながら，自分とは異なる考え方に触れることが，技能習熟だけに陥らないためのポイントともいえる。

練習問題を終えると，因数分解と平方根の考えから解くことを判断する生徒が増える傾向にある。そこで，Ｓ４が触れていた数値に着目することに目を向けさせたいと考え，最後に次の確認問題を例示する。

確認問題
$x^2-80x+1596=0$ なら？

改めて予想させると，ほとんどの生徒が解の公式だと自信をもって判断する。実際に生徒は，解の公式に代入し始める。

Ｓ１：因数分解は見つからないから，代入かな？
Ｓ２：平方根は使えないみたい。だったら解の公式？
Ｔ　：解の公式に，1 と -80 と 1596 を代入して解くのか。
Ｓ３：これ，計算するのおかしくない？何か変。

やりとりの中で気づき始める生徒がいるので，「そうだったんだ」「約 1600 だね」という声が聞こえてくる。数を大まかにみることで $1600=40^2$ になることに気づき，平方完成の考えがうまく使えることのよさを確認することができる。予想外の結果に驚くとともに，２次方程式を解くためには，係数を見定めながら使い分けを考えることが大切であることを確認する。

４．おわりに

主体的な学びは，生徒の「どうして？」「本当か？」といった疑問や発見の中から生じる。授業では問題を工夫することで，こうした追究意欲を高めることに結び付くと考えられる。なお，問題の工夫とともに，問題の提示方法を意図的に行うことも，主体的な学びを生み出すことにつながる。

〔図形領域〕

「やらなくてはいけないこと」から「やってみたいこと」へ

田中　真樹子　［茨城県つくば市立桜中学校教諭］

１．はじめに

新学習指導要領では，今までの学力観にリンクする形で３つの資質・能力が提示され，その実現に向けて「主体的・対話的で深い学び」のある授業づくりが求められている。

一方，普段の授業を振り返ると，与えられた課題に真面目に取り組むも，考えを練りあったり，多様な考えを楽しんだりする活動を億劫に感じたり，結論を急ぎ，答えだけ得ればよいと考えたりする生徒が多い。

そのような中，主体的な学びを生み出すには，課題の工夫と発問が大切だと考える。「あれ？」「なぜ？」という気持ちが最初に生み出されると，生徒たちの課題に向き合う姿勢が変わる。課題解決が「やらなくてはいけないこと」から「やってみたいこと」に変わるからである。

ここでは図形の領域に関する２つの事例を紹介し，主体的な学びについて考えてみたい。

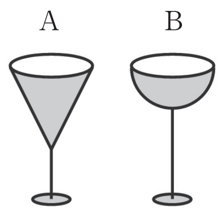
２．事例

⑴　どちらのグラスにたくさん入る？

〔１年：空間図形〕

底面積と高さが等しい円柱と円錐の体積の関係について学んだ後に行った授業である。円錐と円柱の体積比は１：３であることを復習してから，本時の課題を提示した。

【問題】



ＡとＢのどちらのグラスにたくさん飲み物が入るだろうか。

ＡとＢのふちがつくる図形の面積は同じで，深さはＢがＡの半分である。

Ａの形が円錐で，Ｂの形が半球であることを確認してから，どう思うか聞いたところ，深さのことを考えてＡの方がたくさん入りそう，という意見が多かった。

円柱と円錐の体積を比較したときには，水を入れて演示の実験を行ったが，今回は絵しか提示していないので，水を入れて確認することができない。

「問題の中の条件を整理して考えることができないかな？」と問うと，公式で考えるアイディアが生徒から出てきた。１年生の時期に文字式で考えていくのは，まだ抵抗がある生徒が多いので，グループにして友達と一緒に考えることにした。ふちがつくる図形は円になることを確認し，半径を r とおくこと，Ａの深さを h とすることを共通の条件として確認し，グループの活動に入った。

Ａ，Ｂそれぞれの体積は，公式どおり計算すると，

A：$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

B：$\frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$

と表すことができる。ここまでは多くの生徒が書くことができていた。一度グループから一斉に戻して公式を確認しながらそれぞれの体積を計算し，改めて「では，どちらの体積が大きいのかな？」と問うと，皆「あれ？」という表情になる。式を見比べても，どちらの体積が大きいのかすぐには判断できないからだ。

そこでもう一度，この２つの結果からどのようなことがいえるのか，グループで考えるように促した。

いずれのグループの時間も短くとって，全体で練り合う時間を長めにとると，時間超過を防ぐことができる。

このときは何人かの生徒が深さに着目して $h=2r$ であることに気づいた。もし，誰も気づかなければ，ヒントとして「深さについての説明があったね。」と言ってもよいだろう。

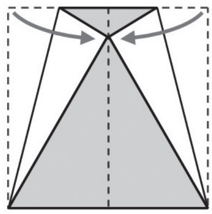
Aの式 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ の h に $2r$ を代入すると，

$\frac{1}{3}\pi r^2 \times 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$ となり，AとBが等しいことを導くことができる。１年生の終わりとはいえ，文字式を変形させて比較していくというのは難しいと感じる生徒が多いのではないかと思われる。教師がゆっくりと丁寧に順を追って説明すると，少しずつ納得する生徒が増えてくるだろう。

さらに，ここからどんなことがいえるか考えさせたい。AとBが1:1ということは，円錐の底面の円の半径が球の半径に等しく，円錐の高さが球の半径の２倍である場合，円錐と球との体積比は1:2となることがわかる。つまり，底面の円の半径と高さが等しい円錐，球，円柱（球の場合，直径を高さと考える）の体積比を考えると，1:2:3になることがわかる。ここまで導くと，ばらばらに覚えていた円錐と球の体積の公式につながりが見え，内容に深まりが得られるのではないかと考えられる。

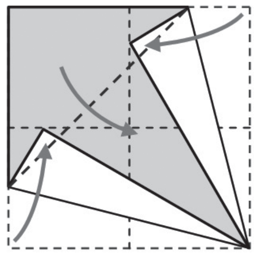
⑵　正三角形だといえるかな？

〔２年：三角形と四角形〕



折り紙を１人１枚配付し，正三角形を折ってみようと呼びかける。

時間をあまりおかずに，「こうすれば正三角形ができるよね？」と示すと「ああ。」と納得した様子だったので，「どうして正三角形とわかったのかな？」と問うと，「中に同じ長さの辺３本で囲まれた図形が見える。」という答えが返ってきた。



次に，「右半分は折り方を変えずに左半分の折る向きを変えたらどうなるかな。」と聞き，実際に演示用の折り紙で折って見せた。最後に左上の部分を折ると，正三角形らしい形ができる。

> **【問題】**　この図形は本当に正三角形であるといえるのだろうか。

まず，正三角形であるというためには，何がいえればよいのかをおさえた。

① ３辺がすべて等しい。

② ３つの角がすべて等しい。

（３つの角がすべて 60° である。）

ここでグループにして，自分たちが折った形が本当に正三角形といえるのかを考えた。折り紙なので，折ったときにできる線や角に着目して考えていく。折り返したところの角の大きさが等しいことや，最初に作った正三角形がヒントになることを伝えた。しかし，３辺がすべて等しいことも，角の大きさがすべて等しいことも，証明することは難しい。見た目には正三角形に見

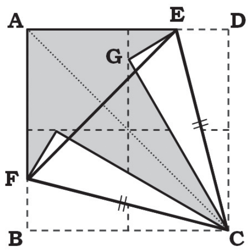
えるのに，なぜそれを納得する形で説明できないのか，生徒たちは首をひねりながら取り組んでいた。

グループから一斉に戻し，わかったことを発表してもらった。

① 正三角形であることはいえなかったが，二等辺三角形であることはわかる。
② 折り方から線対称な図形だとわかる。
③ 右下の角（$\angle$FCE）が 60° になる。

という，３つの考え方が生徒たちから出された。それぞれなぜそうなるのか，理由を皆で考えていった。

②の理由については，折り返した線（EC と FC）の折り返し方が同じなので，$EC = FC$ がいえるという説明や，折り紙を斜めに折ったときにできる線を対称軸として線対称な図形になっているといった考えが出された。



①については，②の考えを根拠に $EC = FC$ がいえ，$\triangle EFC$ が二等辺三角形であるという考えが出された。

③については，折り返した前後で同じ部分の角の大きさは変わらないことから，$\angle ECG = \angle ECD$ が導かれる。また，最初に折った正三角形をもとに考えると，$\angle GCB = 60°$ なので，この２つの角の大きさはそれぞれ $(90° - 60°) \div 2 = 15°$ になる。同様に，$\angle FCB = 15°$ なので，$\angle FCE = 90° - 15° \times 2 = 60°$ になるという考えが出された。

それでも正三角形であることを証明できない。「せっかく出てきた考えを組み合わせてみたらどうかな？」と，ヒントを出してもう一度，周りの友達と意見交換をするように促したところ，「頂角が 60° の二等辺三角形なのだから，底角の大きさを求めると，$(180° - 60°) \div 2$ で，それぞれ 60° になる。つまり，正三角形」という考えが生徒から出された。ここまで考えるのにも，いろいろな生徒に繰り返し発表してもらい，ゆっくりとクラス全体に理解を広げていくようにしないと，一部の議論で終わってしまい，皆の納得を得ることはできない。

正三角形とは，３つの角の大きさや３つの辺の長さに着目して考えるものだが，それでは説明できない状況に直面し，生徒たちは「頂角が 60° の二等辺三角形は，正三角形である」という新しい見方にたどり着くことができた。

３．おわりに

どちらの課題も「あれ？」と感じられる仕掛けを入れてみた。算数・数学で大切なことは，「自力解決」に至る前に「見通しを立てる」ことが挙げられる。多くの問題は見通し通りに解決に導かれるのだが，時々見通しを裏切られるような課題に出会うと，意外さや面白さが増すのではないかと考えられる。意外さや面白さは，最後まで課題に取り組む姿勢を生み出し，主体的な学びの原動力となる。

また，課題を解決することで，新しい見方や考え方にたどり着くことができるのも，魅力の一つである。数学の面白さや大切さを伝えるよい機会であると考える。

〔関数領域・資料の活用領域〕生徒を主体的な学びへと誘う工夫

小石沢　勝之　［筑波大学附属中学校教諭］

1．はじめに

主体的な学びを生み出すためには，見通しをもって問題を解決する機会，問題に粘り強く取り組む機会，解決の過程を振り返ることによってよりよい解決方法を考えたり新たな問いを見いだしたりする機会を設定することが欠かせない。そのためには，情報をもとに根拠を伴って判断する課題，多様な解き方が考えられる課題，生徒の予想をいい意味で裏切るような課題，条件変えや一般化が図れる課題を設定することが必要になる。また，自らの学習を振り返って次へつなげるためには，振り返りの時間の確保だけでなく，探究活動や自由に研究する機会の保証も大切になるだろう。本稿では，上記のような視点に基づいて，関数領域，資料の活用領域における導入課題の事例を検討していく。

2．実践事例

⑴　関数領域における導入課題の事例

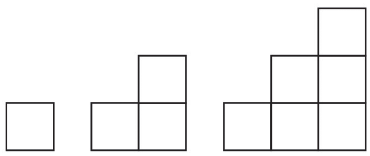
関数領域において主体的な学びを生み出すための導入課題の視点として，次の２つを大切にしたい。

・一見すると，何の関係もないように見えるが，ある「視点」を通してみることによって，２つの数量の間の関係がみえてくるという経験の重要性
・一方を規則的に変化させると「変化の仕方」，「規則性」，「意外性」がみえてくるといった経験の重要性

上記の視点をもとに，導入課題として**課題Ⅰ**や**課題Ⅱ**を考える場面を設定した。

課題Ⅰ
（あらかじめＡ交差点，Ｂ交差点の地図，歩行者信号の写真や映像を見せる。）
　Ｃ交差点の歩行者信号の青の点滅時間を設定したいと思います。何秒に設定するとよいでしょうか。設定した根拠を明確にして説明しなさい。

課題Ⅱ
　１辺が１の正方形を階段状に並べる。
⑴　階段の段数が増えると，それに伴って変わる数量をできるだけたくさん見つけなさい。
⑵　階段の段数を x，見つけた数量を y として，y を x の式で表しなさい。



課題Ⅰを設定した理由は，教科書では問題場面の状況から注目すべき２つの数量が既に与えられていることが多いからである。中学校の関数の学習の導入としては，生徒

たち自身で互いに関係していると思われる数量を自由に取り出し，問題の解決に利用することを大切にしていく必要がある。例えば，信号は生徒にとって身近でイメージしやすいものであり，様々な要因との関係性が想像できる。道幅や交通量など比較的数値化しやすいものから，地理的要因や周辺環境など一概に数値として表れない要因が考慮されている可能性も考えられる。ある数量を決めれば必ず決定するといった関数関係が明確なものではないが，それ以前の着目する数量を様々にして，比較的自由に問題解決の可能性を探ることができる。この過程で，１つの数量に注目しその数量との関係性を調べたり，他の数量を一定とみなしたりすることも必要になる。今後の関数の学習につながることとして意味ある経験と考えられる。単純な式などに表すことはできないが，「決めれば決まる」といった関数の意味の理解につながることを意図したものである。生徒の反応例としては以下のようなものがあった。

○「横断歩道の白い数」に着目する

A：白い数が 18 本，点滅時間は約 9 秒。
　白い数が 7 本，点滅時間は約 4 秒。

B：白い数が 17 本，点滅時間は約 10 秒。

→平均すると 1 本分で 0.55 秒である。
　C では，白い数が 22 本あるので，点滅時間を約 12.1 秒にする。

○「車線数」に着目する

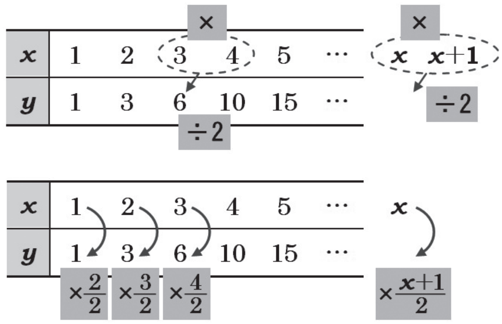
A：5 車線を横切るとき約 10 秒。
　2 車線を横切るとき約 4 秒。

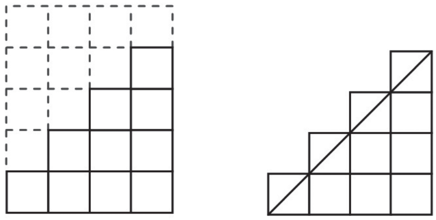
B：5 車線を横切るとき約 10 秒。

→C では，5 車線を横切るので約 10 秒に設定する。

課題Ⅱでも，生徒自身で変化する数量を考え，式に表していく。①階段の高さ，②周りの長さ，③頂点の数，④内角の和，⑤正方形の数（面積）など，様々な数量を取り出し，式に表す。式に表すためには，表にまとめることも必要になる。

①$y=x$，②$y=4x$ などは，表にせずとも式が求められる生徒がいるかもしれないが，表，式，グラフの相互関係は大切であるので，導入の段階では丁寧に指導していくことが大切であろう。⑤は $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ となり，このようなものを扱うかどうかは生徒の実態による。この式をすぐに求められる生徒は少ないが，例えば，対応表や図をもとにして，どのような見方をすれば式をつくることができるか，生徒の発想を引き出せるようにしたい。





$4\times(4+1)\div2$　　$4\times4\times\frac{1}{2}+1\times1\times\frac{1}{2}\times4$

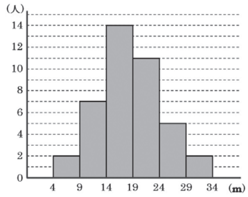
$x\times(x+1)\div2$　　$x\times x\times\frac{1}{2}+1\times1\times\frac{1}{2}\times x$

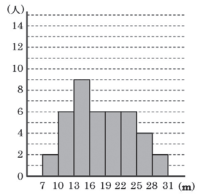
⑵　資料の活用領域における導入課題の事例

小学校では，資料を表やグラフに整理して調べることを学習している。中学校でもその延長上にあるが，身近な問題を解決するために必要な資料を集めたり，資料にどのような傾向があるかを読み取って判断したりすることを大切にしたい。

課題Ⅲ

次のヒストグラムは，あるクラスのハンドボール投げの記録をまとめたものです。それぞれのクラスにはどのような特徴があるのでしょうか。





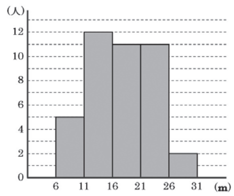
２つのヒストグラムの形状に着目すると，左側のクラスは単峰性のグラフであり，14m 以上 19m 未満の階級の度数が最も多いことが分かる。右側のグラフについては，13m 以上 16m 未満の階級の度数が最も多いこと，４つの階級の度数が同じであることが分かる。生徒同士が話し合い，様々な意見が出ることが考えられるが，ある一つの意見で流れが変わる。それは「階級の幅と初期値が左右のヒストグラムで異なる」ということである。この意見が出た後は，このままでは正しい分析ができないということで，実際のデータを要求してくることが推測される。そこで，実際のデータを提示する。実は，２つのヒストグラムは同じクラスのものであり，その事実を知ると驚く生徒も多い。ここで，次の課題に移る。

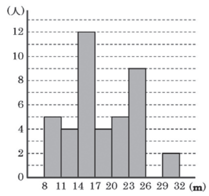
課題Ⅳ

このクラスのハンドボール投げの記録をもとにヒストグラムをかいて，その特徴を分析してみよう。

この課題では，データを整理しヒストグラムをかく時間やヒストグラムをもとに分析する時間の確保を保証したい。生徒の実態にもよるが，階級の幅や初期値を教師から設定することはせずに，生徒の判断に任せて個別作業の時間を十分にとる。ICT 環境が整っている場合には，ヒストグラム作成にコンピュータなどを積極的に利用するとよい。

様々な階級の幅をもつヒストグラムが作成されるが，複数のヒストグラムを比較することでそのクラスの特徴が浮き彫りになる。その際，「山なりのよくあるグラフ」や「全体的に記録が広がっている」など，様々な表現を生徒は用いるが，それらの表現を数学的に洗練していくとともに，ヒストグラムの形状に着目したからこそ表現できていることを確認することも大切である。





ヒストグラムのかき方に終始せず，代表値やヒストグラムによる分析を通してクラスの特徴を分析する過程で，数学的な表現を用いてデータの傾向を読み取れるようにしたい。

また，第１学年で自クラスのデータをヒストグラムに表し，その特徴を記述する経験をすることによって，第２学年の箱ひげ図の学習（新学習指導要領）では，全クラスの分析についてヒストグラムから箱ひげ図へと導入し，学年の傾向を読み取ったり，自クラスと学年の傾向を比較したりといった課題へもつなげることができる。

３．おわりに

「主体的・対話的で深い学び」の実現が要求されているが，この学びの実現には問題解決型の授業が基本になることは明らかである。今まで培ってきた教材をもう一度見直すことによって，生徒を主体的な学びへと誘えるように工夫していくことが大切である。

学習指導要領改訂に伴う移行措置について

1．移行期間における基本方針

・新しい学習指導要領への円滑な移行ができるように，内容を一部加えて指導する。

・指導内容の移行がないなど教科書等の対応を要しない場合などは，積極的に新しい学習指導要領による取り組みができるようにする。特に，「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」をバランスよく育成することを目指す，新しい学習指導要領の趣旨を十分に踏まえて指導するようにする。

2．移行措置の対象となる指導内容

平成 30 年度	平成 31 年度	平成 32 年度		平成 33 年度
移行期間			➡	完全実施
小 6	中 1	中 2	→	中 3
	$\boxed{追加}$ 素数の積 $\boxed{追加}$ 累積度数 ［省略］誤差や近似値，$a \times 10^n$ の形の表現	$\boxed{追加}$ 四分位範囲，箱ひげ図		
小 5	小 6	中 1	→	中 2
		$\boxed{追加}$ 素数の積 $\boxed{追加}$ 累積度数 $\boxed{追加}$ 統計的確率 ［省略］誤差や近似値，$a \times 10^n$ の形の表現		

3．授業時数

中学校数学科の移行期間中の授業時数については，現行通りとする。

4．学習評価

移行期間に追加して指導する部分を含め，現行の学習指導要領の下の評価規準等に基づき，学習評価を行うものとする。

5．補助教材

移行期間中に追加して指導する内容については，教科書に準拠した補助教材を配布することを予定している。教科書に加えて補助教材を適切に使用して指導することとする。

6．高等学校の入学者選抜

移行期間中に実施する高等学校の入学者選抜の出題範囲については，移行措置の内容に留意し，各学年に生徒が履修している内容を踏まえた適切なものとなるように十分配慮する。

平成33年度以降に実施する高等学校の入試選抜における学力検査については，新しい学習指導要領に定める内容が出題範囲となるように配慮する。

また，高等学校の入学者選抜に当たっては，新しい学習指導要領の趣旨を踏まえ，基礎的・基本的な知識及び技能の習得とともに，思考力，判断力，表現力等についてもバランスよく問うことに留意し，知識及び技能を活用する力に関する出題の充実に配慮する。

7．各年度の指導内容

平成31年度

（第1学年）

1章　正の数，負の数 1節　正の数，負の数 2節　加法と減法 3節　乗法と除法 4節　正の数，負の数の活用 追加　**素数の積** **2章　文字と式** 1節　文字の使用 2節　式の計算 3節　式の活用 4節　数量の関係を表す式 **3章　方程式** 1節　方程式とその解き方 2節　方程式の活用 **4章　比例と反比例** 1節　比例 2節　反比例 3節　比例，反比例の活用	**5章　平面図形** 1節　平面図形の基礎 2節　作図 3節　図形の移動 4節　円とおうぎ形の計量 **6章　空間図形** 1節　立体の基礎 2節　立体の見方と調べ方 3節　立体の体積と表面積 **7章　資料の整理と活用** 1節　資料の整理 2節　資料の活用 ［省略］3節　近似値と有効数字 追加　**累積度数**

（第2学年） 現行通り

（第3学年） 現行通り

平成 32 年度

（第１学年）

１章　正の数，負の数 １節　正の数，負の数 ２節　加法と減法 ３節　乗法と除法 ４節　正の数，負の数の活用 追加　**素数の積** **２章　文字と式** １節　文字の使用 ２節　式の計算 ３節　式の活用 ４節　数量の関係を表す式 **３章　方程式** １節　方程式とその解き方 ２節　方程式の活用 **４章　比例と反比例** １節　比例 ２節　反比例 ３節　比例，反比例の活用	**５章　平面図形** １節　平面図形の基礎 ２節　作図 ３節　図形の移動 ４節　円とおうぎ形の計量 **６章　空間図形** １節　立体の基礎 ２節　立体の見方と調べ方 ３節　立体の体積と表面積 **７章　資料の整理と活用** １節　資料の整理 ２節　資料の活用 ［省略］３節　近似値と有効数字 追加　**累積度数** 追加　**統計的確率**

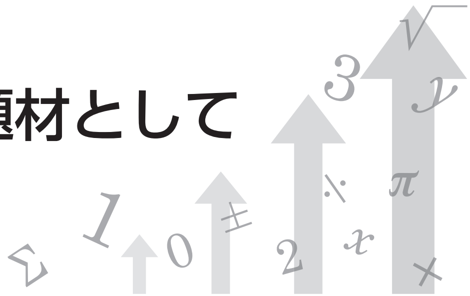
（第２学年）

１章　式の計算 １節　式の計算 ２節　式の活用 **２章　連立方程式** １節　連立方程式とその解き方 ２節　連立方程式の活用 **３章　１次関数** １節　１次関数 ２節　１次関数と方程式 ３節　１次関数の活用	**４章　平行と合同** １節　平行線と角 ２節　合同と証明 **５章　三角形と四角形** １節　三角形 ２節　四角形 **６章　確率** １節　確率 追加　**四分位範囲，箱ひげ図**

（第３学年）　現行通り

連載：数学的活動へのイノベーション

授業中に受けた質問を題材として



吉野　茂　[東京都立三鷹中等教育学校主任教諭]

1．はじめに

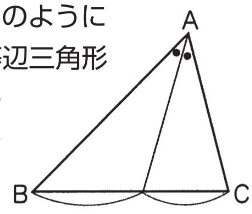
授業中に，その時間のねらいとは異なる予定外の質問を受けることがある。明らかに，中学校数学を超えたツールを利用しなければ解決できないものはその旨を伝えることになるが，後の章で学ぶことになるものは，その予告くらいはしておくこともある。ただし，工夫をすれば，その学習段階でも解決できる場合があることに留意したい。「この問題を解決するツールは○○○」と思い込んでいると，せっかくの題材を無駄にしてしまうこともあるからだ。

今回は，中学３年の「角の二等分線の性質」の学習中に受けたある質問事項について考えていこうと思う。

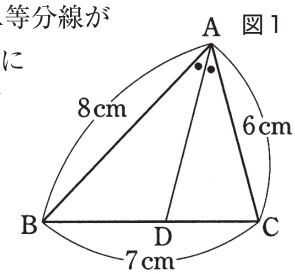
2．角の二等分線から見いだす新たな性質

第３学年の５章では，三角形の内角の二等分線の性質を導くために次のような課題（p.150 ～ 151）に取り組んでいる。

（前略）右の図のように△ABC が二等辺三角形でないとき，∠A の二等分線は辺 BC をどのように分けるでしょうか。



１つ目の課題は，図１の三角形を実際にかいて，∠A の二等分線が辺 BC をどのように分けるかを，実測により調べることになるのだが，このときに，AD の長さについても測ることを試みる生徒がいた。



「実測によると，AD＝6(cm)になりそうだが…。」本当だろうか？

不等辺三角形の面積については，中学校数学の最終段階（３年７章 p.217 の問題７）で求めることを扱うから，その続きともいえるこの課題も，「三平方の定理」を活用すれば何とか解決することができそうである。

しかし，それまで待たなければ解決できない課題なのだろうか？

3．5章「相似」による解決 <その１>

まず，図２のように，AB＝a，AC＝b，BD＝c，DC＝d，AD＝xとおいて，xを求める方法を考えよう。

図３のように，点 D から辺 AB，AC に垂線をひき，それぞれ DP，DQ をひくと，△ADP≡△ADQ より，DP＝DQ となる。

よって，図4のように，垂線によって切り分けられた図形を組み合わせることができる。このとき，$\angle \mathrm{D'AD} = \angle \mathrm{BDC'}$であることに注目しよう。

$\triangle \mathrm{D'AD}$と$\triangle \mathrm{BDC'}$は相似ではないが，上記の角の大きさが等しいことから，図5において，$\triangle \mathrm{D'AI} \backsim \triangle \mathrm{BDJ}$となることがわかる。図の中で，$\mathrm{D'I} = xh$，$\mathrm{BJ} = ch$とした部分は，図6のように「基準の三角形」を作り，これをもとに表現している。中学生にとってわかりにくいかもしれないが，具体的な数値の場合であれば，5章3節①「相似な平面図形の面積」（p.157）でも扱っているので，その考え方を丁寧に説明すれば何とかなるであろう。

図2

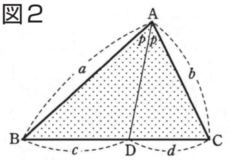


図3

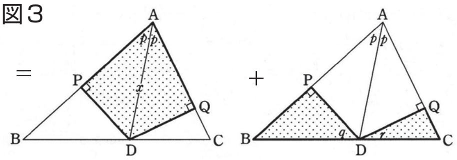


図4

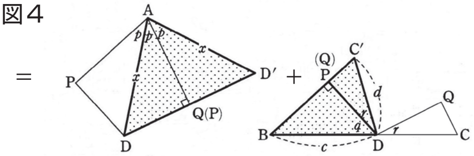


図5

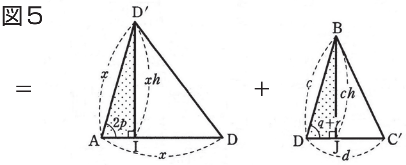
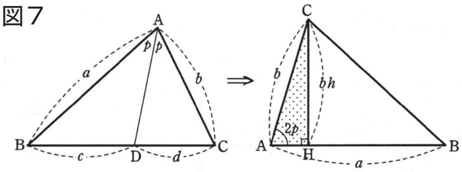


図6

図7



もとの△ABCについても，図7のように向きを揃えて考えることにより，面積について次のようにまとめることができる。

$\triangle \mathrm{CAB} = \triangle \mathrm{D'AD} + \triangle \mathrm{BDC'}$より

$$\frac{1}{2}a \times bh = \frac{1}{2}x \times xh + \frac{1}{2}d \times ch$$

式を整理すると

$h \neq 0$より　$ab = x^2 + cd$

よって，$x^2 = ab - cd$

$x > 0$より　$x = \sqrt{ab - cd}$

以上のようにして，「三角形の内角の二等分線の長さ」を求める公式を導くことができる。とてもシンプルできれいな一般式だ。

実際に，最初の課題にあてはめてみると，

$$x = \sqrt{8 \times 6 - 4 \times 3} = \sqrt{36} = 6(\mathrm{cm})$$

となり，予想通りの結果を得ることができる。

この解法では，図形を裁ち合わせることや共通角を見いだすことへの誘導が必要であるが，計算面でのストレスが少ないという点で優れているのではないかと考える。

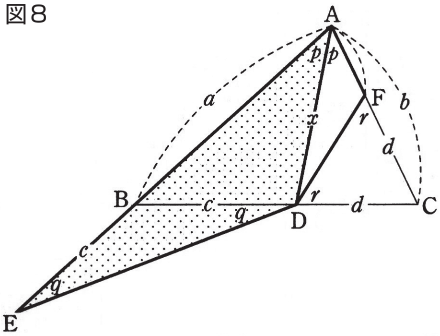
4.5章「相似」による解決 <その2>

次に，補助線を加えることにより，相似な三角形をつくり出す方法を説明しよう。

図8のように，辺ABを延長した直線上に点Eをとり，BD＝BEとする。また，辺AC上に点Fをとり，CD＝CFとする。

さらに，図のように等しい角をそれぞれp，q，rとする。このとき，この図の中にある相似な三角形を見いだす活動を行ってみよう。

図8



「三角形の内角と外角」の関係（2年4章 p.113）を繰り返し用いることにより，

$\angle$ADF＝$\angle q$ となることがわかる。このことから，△AED∽△ADF となる。

対応する辺の長さに注目して比例式をつくると，

$(a+c):x=x:(b-d)$

よって，$x^2=(a+c)(b-d)$

$=ab-ad+bc-cd$

ここで，$a:b=c:d$ より $ad=bc$ であることから，上の式の第2項と第3項が消えて，$x^2=ab-cd$ を導くことができる。

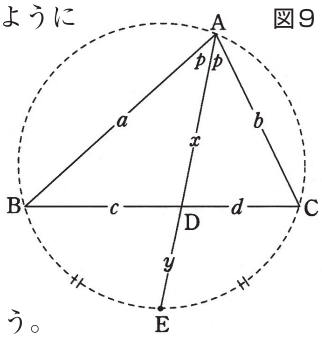
この解法は，図の設定や途中の文字変換の部分がやや技巧的であるが，これも計算面でのストレスは少ない解法といえるだろう。

5．6章「円」による解決

この課題は，円の中にできる相似を見いだすことによっても解決することができる。

まず，図9のように△ABC の外接円を描き，AD の延長線と外接円との交点を E としよう。

図9



今回の解決には直接影響しないが，点 E が弧 BC の中点になることを理解していると，この場面の図を描くときには役に立つ。（3年6章 p.191 の問題4参照）

図10 は，図9において点 C と E を結んだものである。（点 B と E を結んでもよい。）この図において，相似な三角形が2組あることを見いだす活動を行ってみよう。

図10

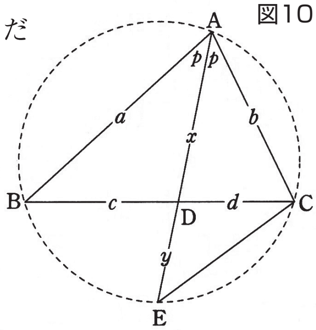


図11 はすぐに見つけられると思うが，図12 を見いだすのには多少時間を要する生徒もいるのではないかと予想される。

図11

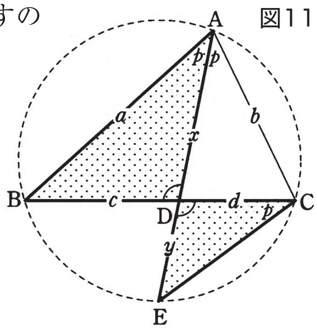


図11 からは，次の等式が得られる。

△ABD∽△CED より　$x:d=c:y$

よって，$xy=cd$　…①

（註：①については，高校数学で学ぶ「方べきの定理」を用いれば即座に結果を示すことができる。）

また，図12 からは，次の等式が得られる。

△ABE∽△ADC より

$a:x=(x+y):b$

よって，$x(x+y)=ab$

$x^2+xy=ab$　…②

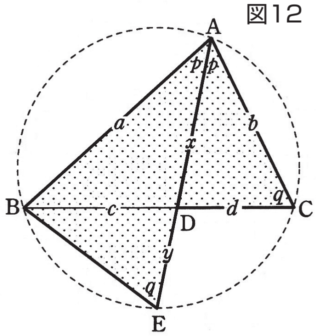
したがって，①，②より

$x^2=ab-cd$

この解法は，補助円を用いたり，y を設

定したりするところが自力では思いつきにくいが，円の学習内容を振りながら相似な三角形を見いだす活動を行うことができる点では意味がある。

図12



（註：図 12 の相似の証明は 3 年 6 章 p.191 の問題 4 参照）

6．7章「三平方の定理」による解決

三平方の定理が既習事項となると，以下のようにして，これまでよりも形式的な計算処理で解決できるようになる。

図13 のように，点 A から辺 BC にひいた垂線を AH とし，AD$=x$，DH$=y$ とおく。このとき，AH を含む 3 つの直角三角形に着目し，AH^2 を式に表してみよう。

△ADH について

$\mathrm{AH}^2=x^2-y^2$ …①

△ABH について

$\mathrm{AH}^2=a^2-(c+y)^2$

$=a^2-c^2-2cy-y^2$ …②

△ACH について

$\mathrm{AH}^2=b^2-(d-y)^2$

$=b^2-d^2+2dy-y^2$ …③

②＝③を y について解くと

$$y=\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(c+d)} \quad \cdots④$$

よって，①，②，④より

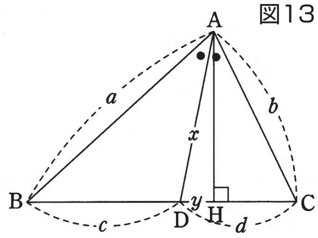
$$x^2=a^2-c^2-2c\times\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(c+d)}$$

ここで，$a:b=c:d$ より $ad=bc$ であることを利用して式を整理すると，

$x^2=ab-cd$

を導くことができる。

図13



この解法は形式的でよいが，後半部分でやや複雑な因数分解を含む計算をしなければならないことが難点である。

7．おわりに

これまでに確認したように，「内角の二等分線の長さ」の一般式は，とてもシンプルできれいな形をしている。しかし，高校の教科書においても「公式」としては登場しない。

高校の数学Ⅰ（必履修科目）において「余弦定理」を学べば，より形式的な計算処理で解決できるようになるが，中学校の数学だけでもいろいろな解決方法が考えられることを確認することができた。また，その一部については授業にも生かすことができてよかった。（生徒の実態に応じて，どのような誘導をつけるかは指導の工夫のしどころである。）

ちょっとした質問事項であっても，それを大切に扱うことによって，よい教材につながる可能性があることを学べたことが今回の大きな収穫である。高校生になって学ぶ新たなツールのよさを理解するためにも，今回のような中学生なりの活動にはそれなりの意味があるのではないかと感じている。


伝統文様

中学数学通信　coMpass　〔2018年　秋号〕　2018年8月31日　発行

編　集：教育出版株式会社編集局
印　刷：大日本印刷株式会社

発　行：教育出版株式会社　代表者：伊東千尋
発行所：**教育出版株式会社**
〒101 - 0051　東京都千代田区神田神保町2 - 10　03-3238-6864（内容について）
URL　https://www.kyoiku-shuppan.co.jp　03-3238-6901（配送について）

なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は，科学技術の進展や国際化，情報化，高齢化などによって，今，大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で，人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには，人や自然を大切にしながら，共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは，この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め，社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社　〒060 - 0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445　FAX: 011-231-3509
函館営業所　〒040 - 0011 函館市本町6-7 函館第一ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886　FAX: 0138-31-0198
東北支社　〒980 - 0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391　FAX: 022-227-0395
中部支社　〒460 - 0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821　FAX: 052-262-0825
関西支社　〒541 - 0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221　FAX: 06-6261-9401
中国支社　〒730 - 0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033　FAX: 082-249-6040
四国支社　〒790 - 0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193　FAX: 089-943-7134
九州支社　〒812 - 0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100　FAX: 092-433-5140
沖縄営業所　〒901 - 0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411　FAX: 098-859-1411