コンパス

# coMpass

定期テストで出題したい問題

coMpass は教育出版が発行する情報誌です


教育出版

コンパス
coMpass
[中学数学通信]　2018年　春号

## CONTENTS

巻頭言

# 思考力・判断力・表現力を問う
## ～定期テストの問題作成について～

鈴木　誠　［東京学芸大学附属世田谷中学校教諭］

### １．何を問うか

これまでの数学の授業でも大切にされてきた思考力・判断力・表現力等は，次期学習指導要領では，資質・能力の三本柱の一つに位置付けられている。したがって，この力が育っているかを測る重要性は，これからも変わることはない。

定期試験で思考力・判断力・表現力を問う問題をつくるといっても，それは容易なことではない。それは，思考，判断といったものがそのままでは目に見えず，表現することによって現れるものだからである。思考力や判断力を問うといったとき，どのような表現ができればよいかを考えることは問題を作成する上で重要な視点の一つである。そして，もっと重要なことは，どんな思考力や判断力を問おうとしているのかを明確にすることである。難しい問題をつくり，それを出題することが，思考力・判断力・表現力に関する問題を出題していることにはならない。日頃の授業の中でどんな思考力・判断力・表現力を育てようとしているのかに目を向け，それが表出するような問題をつくる必要がある。そう考えると，日々の授業で思考力・判断力・表現力をどれくらい具体的に捉え，指導しようとしているかが問われることになる。授業の中で，生徒がどのように思考し，何ができるようにするかを意図した指導をすることが求められる。

### ２．どう問うか

何を問うかが決まっても，その問い方はいろいろと考えられる。全国学力・学習状況調査のＢ問題では，活用するという文脈の中で，数学的な見方や考え方を評価の観点とした問題が出題されている。毎年配布される解説資料には，問題作成の枠組みが示されており，活用の問題がどのような枠組みの中でつくられているかが分かる。これを見ると，数学的プロセスを出題趣旨としてＢ問題が作成されていることが示されている。この数学的プロセスは，日頃の授業の参考になり，問題作成の手がかりにもなる。そして，問い方についてもこの資料の中で示されており，特に，記述式の問題については「事柄・事実の説明」「方法・手順の説明」「理由の説明」と３つに分けて，それぞれについてどのような記述を求めているかが書かれている。記述式の問題を作成する際に参考になるので，目を通しておきたい。

### ３．定期試験問題は授業を見る眼鏡

定期試験の問題は，日頃の授業を見る眼鏡である。授業の中で，技能面が重視されていれば，試験でもそのような問題が多くなるであろう。定期試験をきっかけにして，自分自身の授業の中で，思考力・判断力・表現力を育てる指導がどのようにされているかを振り返り，授業改善に生かすことも欠くことができないことである。

# 「数と式」領域
## 見通しを持って求めさせる問題

森本　奈央　［日本女子大学附属中学校教諭］

### 1．はじめに

定期テストでは，生徒のそれまでの学習の努力が反映されるように出題し，採点するよう心がけたい。努力が結果に反映されることで達成感が生まれ，次への学習意欲へと繋がっていく。

また採点の際には，答えだけの採点ではなく，答えに行きつかなくてもできるだけ部分点をあげられるとよい。問題文と解答欄の間は広めにスペースをとり，どのような問題でもできるだけ答えだけでなく途中の式を書かせたり，考えた過程がわかるよう言葉を添えて答案を書かせたりすることで，表現力，思考力，判断力が身に付いているか確認することができる。

### 2．問題例

**問題１**　２年１章「式の計算」

$a=-3$，$b=6$ のとき，次の式の値を求めなさい。

$$5(a-4b)-4(2a-3b)$$

この問題の式の値を，Ａさんは以下のように求め始めました。Ａさんの求め方に対するあなたの考えを述べなさい。また，あなたならどう求めますか。
自分の求め方で式の値を求めなさい。

$$5(a-4b)-4(2a-3b)$$
$$=5(-3-4\times6)-4\{2\times(-3)-3\times6\}$$
$$=\quad(以下略)$$

**〔評価規準〕**

・すぐに代入するよりも，先に文字式を整理してから代入することのよさに気が付き，そのことを説明し，利用することができたか。

・負の数を代入するときは（　）を付けたり，四則演算を正しく行うことができたか。

〔**解答例**〕

Aさんの求め方に対する考え

Aさんは，与えられた式にすぐに代入をしているが，先に式を整理してから代入した方が，計算がしやすくなる。

自分の求め方

$5(a-4b)-4(2a-3b)$

$=5a-20b-8a+12b$

$=-3a-8b$

$=-3\times(-3)-8\times6$

$=9-48$

$=-39$

〔**生徒の反応例と手立て**〕

Aさんの解答の続きを

$5\times(-27)-4\times(-24)$

$=-135+96$

$=-39$

と計算し，具体的にこの求め方と解答の求め方とを比較し，両方が同じ答えになることを確認した上で，より計算がすっきりとしている解答の方法のよさを指摘している生徒もみられた。

一方で，Aさんの解答は間違いだと指摘している生徒もいた。これは，すぐに代入せず先に計算することの意図を理解しないまま，解き方のみを覚えてしまっているからだと思われる。授業の中で，両方の解き方を実際に経験し，よさを実感させておくことも大切である。

**問題２**　３年１章「式の計算」

次の計算をしなさい。

$$\left(\frac{2x-6y-3}{3}-\frac{x-4y-2}{2}\right)\div\frac{1}{6y}$$

〔**評価規準**〕

・数式全体を見渡し，より適切な方法で計算しているか。

・$6y$ の $y$ が加わったものの２年で学習した計算方法を利用できているか。

・除法を，逆数にして乗法に直して計算することができているか。

〔**解答例**〕

$$\left(\frac{2x-6y-3}{3}-\frac{x-4y-2}{2}\right)\div\frac{1}{6y}$$
$$=\left(\frac{2x-6y-3}{3}-\frac{x-4y-2}{2}\right)\times6y$$
$$=\frac{2x-6y-3}{3}\times6y-\frac{x-4y-2}{2}\times6y$$
$$=2y\,(2x-6y-3)-3y\,(x-4y-2)$$
$$=4xy-12y^2-6y-3xy+12y^2+6y$$
$$=xy$$

〔**生徒の反応例と手立て**〕

すぐに通分しようとするのではなく，問題全体を見渡し，最初に $6y$ を分配することで，早々に分母をはらうことができることに気が付けるとよい。

計算も複雑になるので，符号ミスや，分配のミスなども目立った。２年の学習内容の確認にもなった。

$$\left(\frac{2x-6y-3}{3}-\frac{x-4y-2}{2}\right)\div\frac{1}{6y}$$
$$=\frac{2(2x-6y-3)-3(x-4y-2)}{6}\times6y$$
$$=(4x-12y-6-3x+12y+6)\times y$$
$$=xy$$

このように前半の分数だけをみて，６で通分している生徒が多かった。間違いではないが，先を見通して分配法則を使うことですぐに分母をはらえることに気が付けるとよかった。

**問題３**　３年１章「式の計算」

> 次の式を因数分解しなさい。
> $a^2+2ab+b^2-4a-4b$

**〔評価規準〕**

・複雑な式になっても，既知の知識を利用して最後まで因数分解することができたか。

**〔解答例〕**

$$\begin{aligned} & a^2+2ab+b^2-4a-4b \\ &=(a+b)^2-4(a+b) \\ &=M^2-4M \\ &=M(M-4) \\ &=(a+b)(a+b-4) \end{aligned}$$

$a+b$ を $M$ とする

**〔生徒の反応例と手立て〕**

式の最初の $a^2+2ab+b^2$ が因数分解の公式２そのものなので，この因数分解は見つけやすい。ここで出てくる $a+b$ が，後ろの $-4a-4b$ にも出てくることに，気が付けるとよい。

せっかく置き換えができることに気が付いても，$M^2-4M$ までで止まってしまう生徒も多い。因数分解の４つの公式を学習した後なので，無理矢理その公式のどれかに当てはめようとしたり，特にこの問題は $M^2-4$ ならば公式４の形なので，それと混同する様子も見られた。基本の「共通因数でくくる」ことを，この単元の最初だけでなく後半でも指導しておきたい。

また，$M(M-4)$ まで因数分解できていても，$M$ を元に戻すときに $a+b(a+b-4)$ としてしまう生徒も多い。このような生徒は，そもそも因数分解とは因数を「積の形で表すこと」という認識が十分でないことがわかる。この答え方では式の意味が変わってしまうことや，因数分解の答え方として正しくないことを意識させたい。

なお，生徒の様子によっては応用問題として，問題の項の順を敢えて変えておいて，組み合わせを見つけさせるところから出題してもよいだろう。

## ３．おわりに

テスト返却はできるだけ授業で時間をとって行い，間違えた箇所をしっかりと認識させることが大切である。求め方もわからなかったのか，単なる計算ミスなのか。計算ミスといっても分配のミスなのか，(　) のミスなのか，様々である。テストの解き直しを提出させたり，合格するまで何度でも再テストをするなど着実に身につくよう指導し，テストのやりっぱなしにならないようにしたい。

# 「図形」領域

## 「分からないことは，分かっていることでしか分からない」を実感する

**村松　還**　［静岡県浜松市立北部中学校教諭］

### １．はじめに

定期テストにおける問題を，大きく２つに分けると，「評価に用いる問題」と「日々の授業とのつながりを持たせる問題」があると考えている。

「評価に用いる問題」に関しては，観点別に問題を構成する要素を分析した上で，これまでの学びで身に付けてきた力のうち，どのような力を評価するのかを決め，問題文で与える条件を変化させたり，採点の際に求め方や図等への記述を読み取ったりすることで評価する。

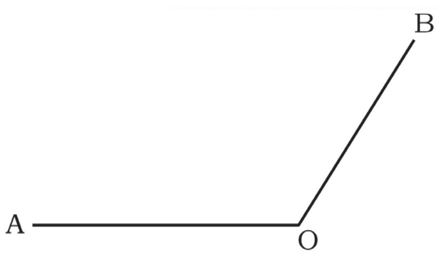
また，「日々の授業とのつながりを持たせる問題」では，生徒たちに数学を学ぶよさや意義を伝えることを念頭に，直近の授業や今後の授業展開において，生徒たちをより深い学びへ誘い，これまで学んできたことで身に付けてきた知識や技能及び数学的な見方や考え方から，新たな見方や考え方が生み出されていくことの楽しさや喜びを味わってほしいと願っている。

今回は，この２つの視点を持って定期テストで出題したい問題を紹介していきたい。

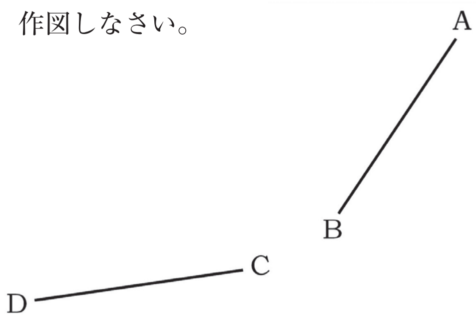
### ２．問題例

**問題１**　１年５章「平面図形」

⑴　∠AOB の二等分線を作図しなさい。

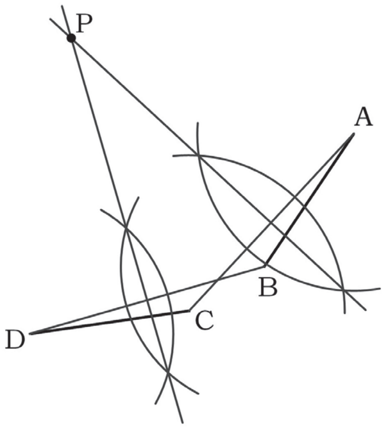



⑵　線分CD は，線分AB が回転移動したものである。点A は点C に，点B は点D と対応しているときの回転の中心P を作図しなさい。



〔**評価規準**〕
⑴　＜数学的な技能＞　角の二等分線の基本的な作図ができる。
⑵　＜見方や考え方＞　基本的な作図の方法を具体的な場面で活用することができる。（移動前後の２つの図形の関係について，等しいことに着目して，直線の位置関係及び対応する辺や角などの図形の性質を見いだすことができる。）

〔**解答例**〕
⑴　略
⑵




〔**生徒の反応例と手立て**〕
⑴の問題では，観点の数学的な技能を評価する問題である。今回は，純粋に角の二等分線の基本的な作図の技能が身に付いているのかを判断するため，問題文も作図の方法の知識が身に付いていれば，知識と技能を一対一対応させるだけでよい簡潔な文章とした。

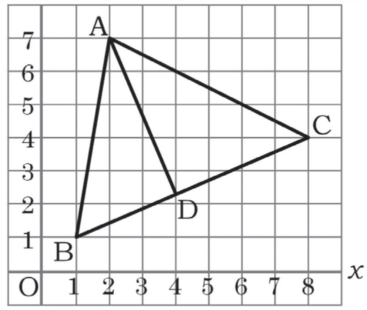
さらに，線分の垂直二等分線の作図や線分上にない点を通る線分の垂線の作図などを出題したならば，線と点に視点を当ててそれらの問題の図形を見つめれば，それらの位置関係が違うだけで，角の二等分線の作図の基本である，合同な三角形をかくという考え方に収束し，作図を体系的に再認識することができる。

次に，⑵の問題では，作図した直線の特徴を理解した上で，条件に合った作図をするために，作図した直線の特徴と他の図形の性質とを統合させる必要のある問題である。今回は，回転の中心は，回転移動した２つの図形の対応する２点から等しい距離にあることと，線分の両端から等しい距離にある点は，その線分の垂直二等分線上にあることを統合させることとなる。このような複数の知識を統合させる必要のある問題を出題するにあたっては，授業の中で同様の思考を必要とする課題に取り組ませることが大切である。例えば，平行移動，回転移動，対称移動の３つの移動を組み合わせて移動させた２つの図形が，どのように移動していったのかを作図によって明らかにしていくような課題を取り扱うことなどが考えられる。

同じ作図の問題であっても，⑴と⑵の問題では，身に付けた知識を技能という能力としてどのように発揮するのかには大きな違いがある。特に，⑵のような問題では，どのような知識を統合させることで問題を解決することができるのかを出題者が確実に把握することが大切であると考える。「評価に用いる問題」とするのならば，限られた時間の中で，一人で思考するという定期テストの状況を鑑みて，必要とする知識を多くても３つまでとしたい。また,「日々の授業とのつながりを持たせる問題」とするのならば，テスト後の授業において，出題した問題を取り上げ，これまで学んできた学習内容を振り返り，知識の統合の過程を確認する。その後, 類題を提示することで, 定期テストで得た知識を一対一対応させて問題を解くことができることはもちろんのこと，既知の知識や技能を組み合わせることで，新たな知識や技能が生み出されていくことのよさを実感させたいものである。

**問題2**　３年５章「相似な図形」

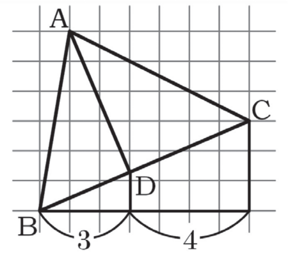
△ ABD と△ ACD の面積比を求めなさい。




**〔評価規準〕**

＜見方や考え方＞　数学的な推論の方法を理解し，見いだした性質や定理を具体的な場面で適切に活用することができる。

**〔解答例〕**△ ABD：△ ACD ＝３：４

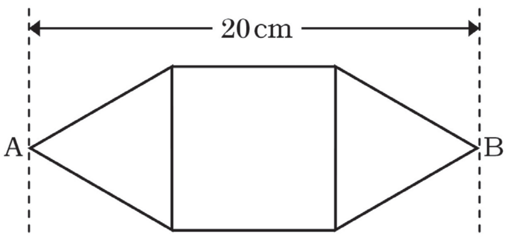



**〔生徒の反応例と手立て〕**

この問題で面積の比を求める場合，２つの三角形の底辺を BD と CD とすれば，高さは共通であり，面積比は BD：CD と等しくなることを理解する必要がある。そのとき，辺の比を辺の長さから直接求めようとすると，点Ｄの座標を求めることが困難であるため，辺の長さを求めることができないことに生徒は困惑する。そこで，相似な図形の対応する辺の比はすべて等しいことに着目し，〔解答例〕に示したような目に見えていない相似な三角形を見つけていくように視点を変化させる必要がある。また，辺の比が分かることで点Ｄの $y$ 座標が明らかとなり，辺の長さや直線 AD の傾きなどの分からなかったことも次々と明らかとなる。このことは，３年において「相似な図形」,「円」,「三平方の定理」の学びから，人間のつくり上げてきた文化の一つである建築で用いられる測量へとつながる重要かつ基礎的なもの・ことの見方や考え方が身に付いているのかを評価していることとなり，数学を学ぶ意義を強く実感できる問題である。

**問題3**　１年６章「空間図形」，３年７章「三平方の定理」

１辺の長さが等しい正三角形２つと正方形１つを合わせた図形がある。図のように，それぞれの正三角形の頂点を A，B とし，線分 AB の長さが 20cm であるとき，この図形の面積を求めなさい。



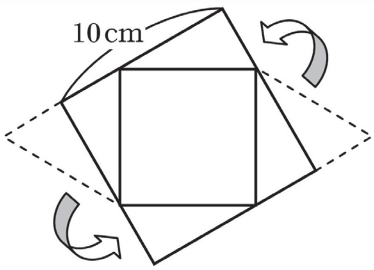

**〔評価規準〕**

１年＜見方や考え方＞　多角形を三角形に分割することによって，その性質が見いだせることを理解し，問題解決に活用することができる。

３年＜見方や考え方＞　平面図形の中にある直角三角形を指摘し，三平方の定理を用いて，辺の長さ，面積などを求めることができる。

〔**解答例**〕　100cm$^2$

（下図は，１年での考え方）




〔**生徒の反応例と手立て**〕

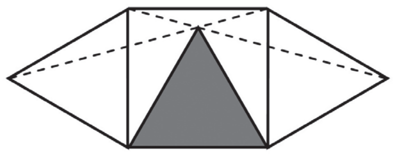
この問題は，「日々の授業とのつながりを持たせる問題」として紹介したい。

生徒が理解している知識として，１年では三平方の定理を使えないが，３年は使えるという違いがある。ただし，どちらの学年においても，平面図形を三角形に分割して捉えるという共通点を持っている問題である。

１年では，円の一部としてのおうぎ形について，同一の円の弧の長さがその中心角の大きさに比例することに着目して，おうぎ形の弧の長さや面積の求め方を考える学習をする。このときに，小学校での図形の面積の求め方の学習を振り返ることによって，未知の図形の面積の求め方は，既知の図形に帰着して考えていることを確認する。そして，それぞれの図形が別々に公式を持っているのではなく，三角形に帰着できることを図形の操作だけではなく，式の上からも確認した後，おうぎ形においても同様の見方ができることを扱う。この見方は，小学校でも円の面積を求める際に，複数の細かなおうぎ形に分け，それらを並べ替えることによって平行四辺形や三角形に変形することができるという考え方である。このことを，おうぎ形でも扱うことによって，高等学校における積分の考え方へと拡張していく見方や考え方であることを確認するとともに，先に述べた未知の図形の面積を既知の図形に帰着して考えることができることのよさや広がりを実感できる。

３年では，平面図形の中にある直角三角形を見つけ，三平方の定理を用いることで，１年での考え方より簡潔に面積を求めることができる。１年での学習を振り返ることによって，三平方の定理の汎用性の高さをより実感できる問題となる。

この問題には，２年４章「平行と合同」と５章「三角形と四角形」の問題として出題することも可能であることも紹介しておきたい。下図の破線のように２本の線分を加え，その交点によって新たな正三角形（塗りつぶした部分）が生まれるという問題である。



## ３．おわりに

定期テストは，学校教育活動の中で行われていることや生徒がそこに向けて多くの努力を積み重ねていることから，身に付けた力を評価すると同時に，数学を学ぶよさや意義を実感させたい。そうすることで，生徒にとっての数学を学ぶ価値を見いださせるとともに，認知の根源的な意味である「分からないことは，分かっていることでしか分からない」を実感させ，分からないことも楽しめる人間を育てていきたい。

# 「関数」領域
## 具体的にイメージし，美しい解法を探す

木下　陽子　［東京都目黒区立第七中学校主幹教諭］

### １．はじめに

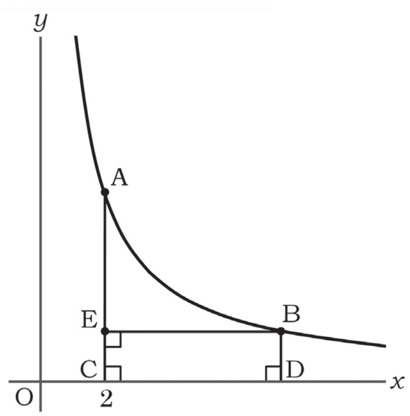
定期考査を行う目的は，学習した内容の理解度や定着度を確認し，結果を分析することである。そして，授業改善に役立てたいと考えている。

定期考査を作成する際に留意していることは，主に以下の点である。①「知識・理解」「技能」「数学的な見方・考え方」の観点の点数配分が片寄らないように考慮すること。②試験時間に見合った適切な量，内容であること。③⑴が解けないときでも，⑵に影響が出にくいように問題を設定すること。④「見方・考え方」を測る問題では，解答欄を十分にとり，考え方を記述させる。（部分点で採点する。）

また，教科書に合わせた表記にすることや問題用紙と解答用紙の記入欄の配置を揃え，解答しやすいように工夫することに気を付けている。思考力・判断力を問う問題では，関数と図形や数と式等の領域をまたがって出題することが多い。

### ２．問題例

**問題１**　１年４章「反比例」




$x>0$ とする $y=\frac{12}{x}$ のグラフ上に２点A, Bがある。

２点から $x$ 軸にそれぞれ垂線AC, BDをひき，線分AC上に，BE $\perp$ ACとなるような点Eをとる。

点Aの $x$ 座標が２，四角形BECDの面積が９のとき，点Bの座標を求めよ。

**〔評価規準〕**

反比例の式から，点Bの座標と四角形BECDの面積がどのように変化するか予想し，考えることができたか。また，座標を

文字で置くことで，方程式を利用しようと考えることができたか。

〔解答例〕

点B $\left(t,\ \frac{12}{t}\right)$ と表せる。

$\frac{12}{t}\times(t-2)=9$

これを解くと，$t=8$

よって，点B $\left(8,\ \frac{3}{2}\right)$

〔生徒の反応例と手立て〕

反比例の式から点Aの座標を求めることができる。長方形の縦・横の長さの関係を調べ，予想を立てる。

【ポイント①】点Bの $x$ 座標を $t$ として，$y$ 座標を表すことができる。

→［できない場合］関数の意味を理解できていないことが予想されるため，$x$ と $y$ の関係を具体的な数で確認する。

（例；$x=3$ のとき $y=\frac{12}{3}$，では $x$ が $t$ のときは3の代わりに $t$ を代入する）

【ポイント②】BE，BD（長方形の横，縦の長さ）を $t$ を用いて表現できる。

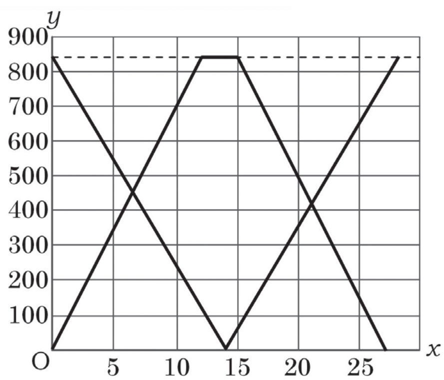
→［できない場合］文字式の表し方を確認し，言葉の式に置き換えてみる。

（横の長さ＝Bの $x$ 座標－Eの $x$ 座標）

【ポイント③】長方形の面積が9であることから，方程式をつくり解くことができる。

→［できない場合］立式ができていないのか，方程式を解くことができないのか確認する。

**問題2**　2年3章「1次関数」




A君とBさんの学校は駅から840m離れている。A君は学校を出発し，毎分70mの速さで学校と駅の間を1往復し，駅では3分間の休憩をとった。

また，BさんはA君が学校を出発したのと同じ時刻に駅を出発し，毎分60mの速さで駅と学校の間を休まず1往復した。

左のグラフは，A君とBさんが出発してから $x$ 分後に学校から $y$ mの地点にいるとして，$x$ と $y$ の関係を表したものである。

(1)　A君がBさんと1回目に出会うのは，出発してから何分後か求めよ。

(2)　A君が学校に着いてから何分後にBさんが駅に着くか，求めよ。

(3)　A君とBさんが2回目に出会うのは学校からどれだけ離れた地点であるか，求めよ。

〔評価規準〕

1次関数の変化の仕方をグラフから読み取り，変化の割合が速さを表していることに結びつけて考えることができたか。また，交点の座標は連立方程式の解であることを理解しているか。

〔解答例〕　略

〔生徒の反応例と手立て〕

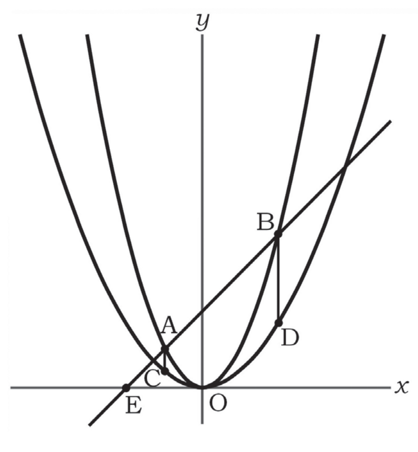
【ポイント①】1次関数の式を，速さ・時間・道のりの関係と結びつけて考えることができる。それぞれ1分間に70m，60m進むので，1分間に2人の進む距離の合計は130m

であるとして，⑴に利用できているか。

【ポイント②】グラフの交点の意味を理解し，連立方程式の解に結びつけて考えている。

→２つの式を成り立たせる解 $(x, y)$ として，既習事項である連立方程式を利用しようとしているか確認する。

**問題３**　３年４章「関数 $y=ax^2$」（３年５章「相似な図形」の内容も含む）




$a>0$，$b>0$（$a>b$）である。

２点A, Bは $y=ax^2$ のグラフ上の点であり，$x$ 座標はそれぞれ $-1, 2$ である。また，２点C, Dは $y=bx^2$ のグラフ上の点であり，Cの $x$ 座標はAの $x$ 座標と等しく，Dの $x$ 座標はBの $x$ 座標と等しい。

⑴　AC：BD を求めよ。

⑵　AB を通る１次関数のグラフの傾きを，$a$ を用いて表しなさい。

⑶　点E の座標を求めよ。

**〔評価規準〕**

関数のグラフ上の４点の座標を文字を用いて表現し，線分比や傾きを考察することができたか。平行線の比（相似な図形）と関連づけて考えることができたか。

**〔解答例〕**

⑴　AC：BD ＝ 1：4

⑵　$a$

⑶　点E（－２，０）

**〔生徒の反応例と手立て〕**

【ポイント】具体的な数値がわからないものが多い状況で，文字のよさを利用し，比を求めることができ，数と式，関数，図形に関連づけて考えることができるかを見る。

⑶では，グラフが AB を通る１次関数の式を求め，傾き $a$，切片 $2a$ と考える生徒もいる。また，三角形の相似（AC，BD の延長線と $x$ 軸との交点を F，G とすると，△EAF ∽△EBG）から，座標を求める生徒もいるだろう。よりシンプルに美しい解法を導かせたい。

## ３．おわりに

今回，紹介した３問は，過去に出題された公立高校入試問題を改題したものである。生徒の実態に合わせ，設定の数や式を変えることで，問題の難易度は変えることができる。また，出題者の意図により，観点「技能」または「見方・考え方」を測るのかにより，生徒に求める記述が変わってくると考える。授業では，仲間の考え方を知ることで視野を広げ，より良い解法を追及させたい。定期考査では，既習事項や身に付いた考え方の中から必要なものを判断し，自分なりの解法を導かせたいと考えている。

より美しい解法を考え，数学的に考えることが楽しいと思える生徒を育てていけるように今後も研修を積んでいきたい。

# 「資料の活用」領域
## 資料を読み取り，様々な課題を解決しよう

小出　和正　［東京都目黒区立東山中学校主幹教諭］

### １．はじめに

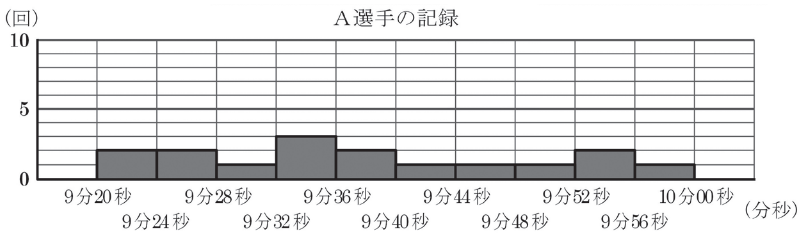
現在の情報化社会においては，多くの人が様々なデータを手にしたり操作したりしながら生活している。日常生活の様々な場面において，多くのデータの中から，目的に応じて必要なデータを収集して処理し，その傾向を捉え，課題の解決や他者との意思疎通をしている。

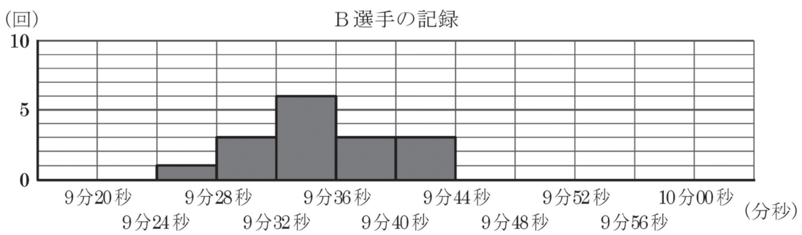
今回「資料の活用」領域で作成した問題では，「ヒストグラムや度数分布表などから必要な情報を正確に読み取り出す力」，「取り出した情報を比較・関連付ける力」，「その背景や理由等を自分なりに解釈し説明する力」など，生徒の実態を把握することをねらいとしている。

### ２．問題例

**問題**　１年７章「資料の整理と活用」

陸上競技大会（中学生の部）で3000m 走の代表選手選考会を行い，その結果３名中２名の代表選手が決まりました。残り１名の枠に２名（A選手・B選手）のどちらを代表選手にしようかと迷っています。下記のヒストグラムは，２名の代表選考会までに行われた直近のタイムをまとめたものです。また，タイムは９分20秒以上９分24秒未満のように読みます。次の各問いに答えなさい。



⑴　A選手の最頻値を求めなさい。
⑵　B選手の中央値はどの階級に入っているか答えなさい。
⑶　B選手の平均値を求めなさい。
⑷　あなたは，A選手とB選手のヒストグラムを比較したとき，どちらが代表選手としてふさわしいと考えますか。どちらか1人を選び，その選手を選んだ理由を説明しなさい。

**〔評価規準〕**

⑴　ヒストグラムを読み取り，最頻値を求めることができる。
⑵　ヒストグラムを読み取り，中央値を求めることができる。
⑶　ヒストグラムを読み取り，階級値，度数を用いて，平均値を求めることができる。
⑷　各ヒストグラムを読み取り比較し，理由を考えることができる。

**〔解答例〕**

⑴　9分34秒
⑵　9分32秒以上9分36秒未満の階級
⑶　9分35秒
⑷　<u>A選手を選ぶ</u>
（理由）範囲が大きく，記録にばらつきはあるが，B選手と比べて最小値が小さく，B選手よりも速くゴールできる可能性があるため。
<u>B選手を選ぶ</u>
（理由）平均値を比べると，B選手の方がA選手よりも良いため，安定して走り，よい成績が見込めるため。

**〔生徒の誤答例や考察〕**

⑴　考　察：誤答の要因の多くは，最頻値や度数といった各用語の理解が不十分であることが考えられる。
⑵　誤答例：9分34秒
考　察：誤答の要因の多くは，階級値と中央値の理解が不十分であることが考えられる。
⑶　考　察：階級値の理解が不十分であるために，平均値を求めることができないことが考えられる。
⑷　考　察：正答ではあるが，範囲や代表値などの数学的な表現を用いていない。数学的な表現を用いて説明することに課題があると考えられる。

## 3．おわりに

限られた時間の中で行うテストにおいて，教える側は，生徒が何を学び，何を身に付け，どのように活用したか評価・把握しなければならない。そのため，教える側は意図的に問題を作成する必要があり，意図的な問題を作成するためには，不断の授業改善は必須である。基礎的・基本的な知識・技能の習得はもとより，それらを活用して問題を解決するための数学的な思考力，判断力，表現力等を育みたい。そして，これまでの学習の集大成となるようなテスト問題であるためにも，知識を問うだけではなく，日常生活に関わりがあり，かつ活用する問題を取り入れ，そのテストに価値をもたせたいと考える。

# 大学入試から学ぶ思考力

吉野　茂　［東京都立三鷹中等教育学校主幹教諭］

## 1．はじめに

筆者が勤務する中等教育学校には，前期生（中学生相当）と後期生（高校生相等）が同居しており，担当する授業内容もかなり広範囲に及ぶ。筆者の場合，今年度は１学年（中学１年相当）と５学年（高校２年相当）の数学Ⅱと数学Ｂを受け持っている。生徒たちの発達段階も異なるし，指導内容の難易度にも大きな隔たりがある。その分，授業をしていて面白さもあるのだが，教材研究はなかなか大変である。

さて，前期生に対しては，教科書の問題を補充するために，高校入試問題の中から良問を選んで取り組ませることがあるが，後期生も指導している関係から，大学入試問題に接する機会も多いので，前期生にも考えさせたら面白と思われる問題に遭遇したときにはそれを教材とすることもある。

もちろん，文面については前期生にとって困難な場合もあるので，状況に応じて翻訳が必要な場合があるが，高校入試とはまたひと味違った思考力を磨くことができるのではないかと感じている。

次期学習指導要領のテーマである「主体的・対話的で深い学び」に関わる教材作成におけるヒントにも結びつくのではないかと考え，今回は中学生にも手の届きそうな問題の中から２つ紹介してみようと思う。

## 2．角が等しくなるように動く点？

**＜問題１＞**
座標平面上の３点 A (1, 0)，B (− 1, 0)，C (0, − 1) に対し，∠APC ＝∠BPC をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし，P ≠ A，B，C とする。

この問題は，中学校３年・第６章「円」の学習を終えた後であれば扱うことができる。「軌跡」という用語は中学校数学において登場しないが，「一定の条件を満たす点が動いてできる図形」のことであるから，内容的には中学校の教科書の本文にも記載されていることがらである。

この問題では，図１のような図をかくことから始めることになるだろうか。

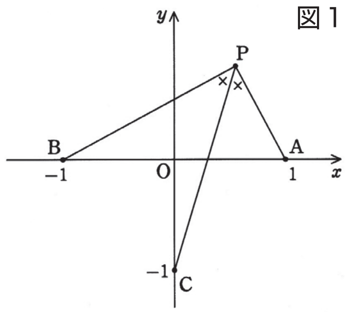



図1

大学入試の答案としては，余弦定理かベクトルの内積などを利用し，軌跡を方程式で表現することになるであろう。高校生としてはそのような解決の方法によさを見いだすわけであるが，中学生としては，実際に図をかき試行錯誤しながら，条件を満たす点を探し

ていくことに面白さを見いだすことができる問題ではないかと考える。

本問で用いる既習事項は，以下のようなものが考えられる。

「２点 A，B から等しい距離にある点」（中 1 p.175）

「三角形の内角と外角」（中 2 p.113）

「二等辺三角形の頂角の二等分線」（中 2 p.147）

「円周角と弧」（中 3 p.179）

「円周角の定理の逆」（中 3 p.182）

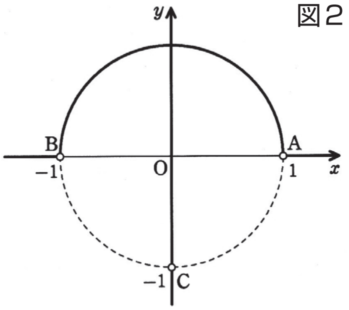


図2

さて，この問題の正解は，図２の太線部分のようになる。

生徒たちが最初に発見するのはどの範囲だろうか。また，P の動く範囲をもれなく指摘できるだろうか。さらに，解答に示された３つの範囲以外にはありえないことを，中学生なりに説明できるだろうか。

自分の考えをしっかりもたせつつ，それらをもとにして皆で話し合う活動を大切にしていけば，授業は自然と盛り上がっていく問題の１つなのではないだろうか。

### ３．独立に動く２点に連動する点？

**＜問題２＞**
１辺の長さが１の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2：1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

本問について，「点 R の範囲」のみであれば，中学校３年・第５章「相似な図形」の学習を終えた後で対応可能であるが，「面積」までを扱うのであれば，第７章「三平方の定理」の学習を終えた後となる。

本問の場合，大学入試の答案としては，ベクトルを用いて内分点の存在範囲が示す図形を確認するのがよいであろう。高校生としてはそのような解決の方法によさを見いだすわけであるが，中学生には，そのようなツールはない。

本問の前半部分で用いる中心となる既習事項は，「三角形と比（2）」（中 3 p.149）であり，これを動的に捉えればよい。

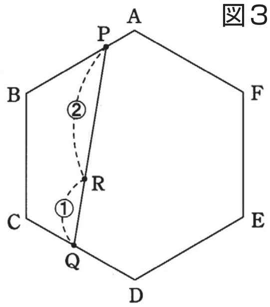


図3

本問がやっかいなのは図３に示すように P，Q という２つの点が動いてしまうことである。

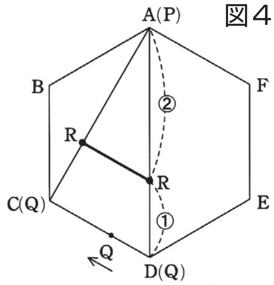


図4

両方を一度に動かすと混乱してしまうので，まずは，図４に示すように，P を A の位置に固定し，Q のみを D から C まで動かすことを考えてみよう。

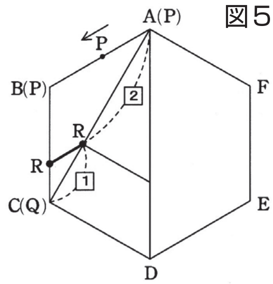


図5

R は PQ を 2：1 に分ける点なので，Q のみを D から C まで動かすと，R の動いてできる図形は辺 DC に平行な線分となる。

次に，図５のようにQをCの位置に固定したまま，P の方を A から B まで動かしてみよう。

先ほどと同様に考えると，R の動いてできる図形は辺 AB に平行な線分となる。

さらに，図6のようにPをBの位置に固定したまま，QをCからDまで動かすと，Rが動いてできる図形は辺 CD に平行な線分となる。

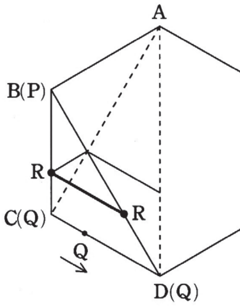


図6

そして，図7のようにQをDの位置に固定したまま，PをBからAまで動かすと，Rが動いてできる図形は辺 BA に平行な線分となる。

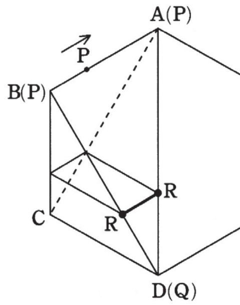


図7

以上のことから，点Rが動いてできる図形は平行四辺形であることがわかる。厳密には，点Rがこの内部をすき間なく動くことを確かめる必要がある。

例えば，図8のように最初に固定する点Pを辺 AB の中点にとると，Rの動いてできる図形は辺 DC に平行な線分であり，この平行四辺形の内部に含まれることがわかる。

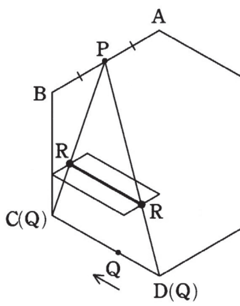


図8

最後に，面積について考察しよう。点Rが動いてできる平行四辺形の長辺と短辺は，それぞれもとの正六角形の１辺の$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$であり，長辺と短辺のなす鋭角は60°であることが確認できる。したがって，「三平方の定理」が学習済みであれば，面積については容易に求めることができるであろう。

もとの正六角形の何分のいくつになるかという問いに変更すれば，面積比のよいおさらい問題にもなる。

**問題２**に対するヒントや誘導をどこまで行うべきなのかは生徒の実態にもよるが，解決の中で用いた「独立して動く２文字の１つを固定する」という考え方は，将来の大学入試問題を攻略する上では大切にしておきたい数学的思考法の１つである。多くの文字や要素が含まれているときには，１つの文字や１つの要素に着目すると，うまく整理して考えられるようになるのと同じようなことである。

## ４．おわりに

高校受験を控えた中学３年生を担当されている先生方であれば，教科書の内容をいかに早く終わらせるかが重大な関心事で，余計なことをやっている暇などないとお叱りを受けるかもしれない。（筆者も長年，中学校の現場にいたのでその気持ちはよくわかる。）

しかし，時には適切な時間を確保して，それまでに培った思考力を総稼働させながら，皆で考え学び合えるような課題に取り組ませることも大切にしていきたいものだ。

なお，今回は変な先入観にとらわれないように，出典を明らかにせずに考察してきたが，これらの問題は実はどちらも東京大学文系の入試問題（**問題１**：2008 年度，**問題２**：2017 年度）である。

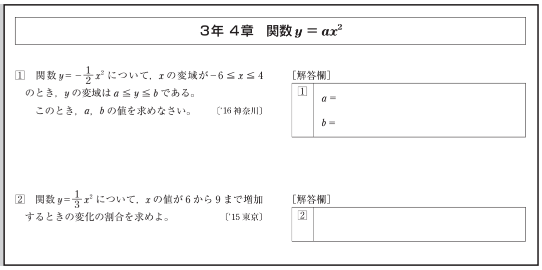
中学生にはちょっと難しい箇所もあったかもしれないが，今後の教材開発への参考にしていただけたら幸いである。

すぐ使える！

# 教育出版の「授業で役立つ」webコンテンツ３選

## 一、公立高校入試問題

平成25年度～平成28年度に実施された全国の公立高等学校の入試問題の中から良問を厳選しました。**詳しい解説**がついているので，生徒の自習にも使えます。



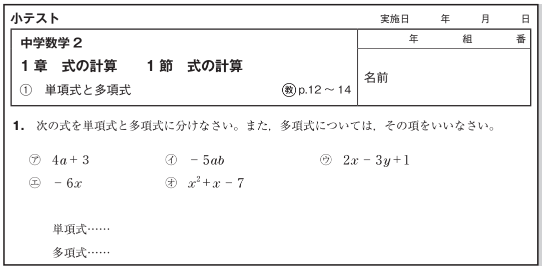
3年 4章　関数 $y=ax^2$

①　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，$x$ の変域が $-6\leqq x\leqq 4$ のとき，$y$ の変域は $a\leqq y\leqq b$ である。
このとき，$a$，$b$ の値を求めなさい。　〔16 神奈川〕

［解答欄］
①　$a=$　$b=$

②　関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ について，$x$ の値が6から9まで増加するときの変化の割合を求めよ。　〔15 東京〕

［解答欄］
②



小テスト　実施日　年　月　日

中学数学２
１章　式の計算　　１節　式の計算
①　単項式と多項式　（教）p.12～14

年　組　番
名前

**1.**　次の式を単項式と多項式に分けなさい。また，多項式については，その項をいいなさい。

㋐　$4a+3$　㋑　$-5ab$　㋒　$2x-3y+1$
㋓　$-6x$　㋔　$x^2+x-7$

単項式……
多項式……

## 二、小テスト

教科書の**基礎・基本**を中心とした
小テストです。テストとして使用できる
ほか，日ごろの授業の復習としても
使用することができます。

## 三、授業で使える動画集

図形の性質を確かめる実験動画です。
動画の時間は１～３分で，**短時間で**
**視覚的に学習内容を確認する**ことが
できます。


←教育出版 HP よりダウンロードが可能です↓
http://www.kyoiku-shuppan.co.jp/textbook/chuu/sugaku/

## 教科書紙面と連携するアプリもあります！

教科書リンク

教育出版

Google play からダウンロード

Available on the App Store

教育出版の教科書の紙面をアプリに認識させると，その紙面に関連したデジタル教材が表示されます。スマートフォンやタブレットで使えます。

ダウンロード無料！

教科書リンク　検索


新宿サインリング（東京都）

新宿警察署裏交差点に架けられている信号機で，交通信号のほかに照明，車両検知器などの機能がこの中に集約されている。真上から見ると，きれいな円の形状になっていて，歩道に設置された柱によって支えられている。最近では，2016 年に公開された映画『君の名は。』の劇中や予告映像に登場し，注目を浴びた。

**中学数学通信　coMpass　〔2018年　春号〕**　2018年3月31日　発行

編　集：教育出版株式会社編集局
印　刷：大日本印刷株式会社

発　行：教育出版株式会社　代表者：伊東千尋
発行所：**教育出版株式会社**
〒101 - 0051　東京都千代田区神田神保町2 - 10　03-3238-6864（内容について）
URL　http://www.kyoiku-shuppan.co.jp　03-3238-6901（配送について）

**なかよし宣言**

わたしたちをとりまく自然や社会は，科学技術の進展や国際化，情報化，高齢化などによって，今，大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で，人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには，人や自然を大切にしながら，共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは，この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め，社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

**北海道支社**　〒060 - 0003 札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F
TEL: 011-231-3445　FAX: 011-231-3509
**函館営業所**　〒040 - 0011 函館市本町6-7 函館第一ビルディング3F
TEL: 0138-51-0886　FAX: 0138-31-0198
**東北支社**　〒980 - 0014 仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F
TEL: 022-227-0391　FAX: 022-227-0395
**中部支社**　〒460 - 0011 名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F
TEL: 052-262-0821　FAX: 052-262-0825
**関西支社**　〒541 - 0056 大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F
TEL: 06-6261-9221　FAX: 06-6261-9401
**中国支社**　〒730 - 0051 広島市中区大手町3-7-2
あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F
TEL: 082-249-6033　FAX: 082-249-6040
**四国支社**　〒790 - 0004 松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F
TEL: 089-943-7193　FAX: 089-943-7134
**九州支社**　〒812 - 0007 福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室
TEL: 092-433-5100　FAX: 092-433-5140
**沖縄営業所**　〒901 - 0155 那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F
TEL: 098-859-1411　FAX: 098-859-1411