coMpass

コンパス

統合・発展の考え方が育つ定番教材とその扱い方

coMpass は教育出版が発行する情報誌です

教育出版

コンパス
coMpass
[中学数学通信]　2019年　秋号

CONTENTS

巻頭言

創造的な数学の学びのために

～「統合的・発展的に考察すること」の楽しさ・大切さを～

山崎　浩二　[岩手大学教授]

「統合的・発展的に考察する」ことが中学校数学科の目標に再び明示された。再び，とは，昭和44年度学習指導要領の目標でも示されている。昭和44（1969）年といえばちょうど50年前。わが国はまだ高度経済成長の只中であり，アポロ11号が人類初の月面着陸に成功した年でもある。

当時の学習指導要領は数学教育の現代化を目指したものであり，中学校には，集合，確率，不等式などが新たに加わるとともに，関数の概念をより明確に指導することなども盛り込まれた。しかし，何と言っても一番の目玉は，数学的な考え方を指導の中心に位置付けたことであった。統合的，発展的に考察することはその切り札だった。

統合的に考察するとは，多くの事柄をバラバラにしておくのではなく，より広い観点から共通するものを見いだし，同じものとしてまとめていこうとすることである。数学の問題の本質的なしくみ（構造）に着目するための大切な考え方である。発展的に考察するとは，物事を固定的なもの，確定的なものと捉えず，絶えず新しいものを創造しようとすることである。数学の問題のある部分や条件を変えることで，より一般化にしたり，より深化させたりすることなどはその一例と言えよう。数学的な関係や性質などの発見は，この考えに基づいてなされることが少なくない。この２つの考えは，例えば「発展し，統合する」のように連動することでその力が増す。

統合的・発展的に考察する力を育むことで，思考や労力が節約でき，よりよく問題解決ができるようになる。より一般的な性質やきまりに気づいたり，これまでの事柄や関係を一つにまとめたり，関連付けることもできる。問題に対しても，より深く，より広く捉えられるようになり，数学の学習の楽しさに気づく機会にもなる。

当時は，数学的な考え方を含めた数学を学ぶことの価値を生徒自身が実感し，それを基に数学を使って自ら問題解決できる態度まで育つよう，まさに創造的な学びを目指したのである。その精神は，今日まで脈々と受け継がれている。

統合的・発展的に考察していくことは，少なからず高次な思考でもある。したがって，必ずしも自然に育つものではない。数学の学習を通して，意識して育むことが大切である。もちろんそれはふだんの授業の中でも，教科書の問題を使ってでもできる。

単に，解いて終わり，では気づくことのなかった関係や性質が隠れていたことに驚いたり，こんなところにも同じと見られるものがあったんだという感動を覚えたり。このような創造的な学びが培われるよう，50年目を契機に一層の期待をかけたい。

第１学年
既習を振り返り，新たな知識を得る視点を見いだす実践

小石沢 勝之　［筑波大学附属中学校教諭］

１．はじめに

数学的に考える資質・能力を育成するためには，学習過程の果たす役割が重要である。算数・数学の学習過程については，学習指導要領解説で周知されているように，そのイメージ図が共有されつつある。本稿では，統合的・発展的に考察する力と関連させて，特に「数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返って，統合的・発展的に考察する過程」に焦点を当てる。この学習過程では，振り返りが大切な意味を持つ。問題解決の振り返りの過程の中で，新たに分かることがないか考えたり，条件を変えて考察範囲を広げたり，複数の事柄の間にまたがる性質の相違点を見いだしたりする活動を重視し，新たな知識を得る視点を明確にして，数学的活動を重視した授業の実現を図ることが大切である。

これらを踏まえて，教科書の題材を基に，統合・発展の考え方が育つ事例を検討していく。

２．教科書の題材を基にした事例

(1)　文字式の計算

【問題】　マッチ棒を並べて，正方形を x 個つくるとき，マッチ棒は何本必要ですか。

文字式の導入でマッチ棒や碁石を用いた場合，まずは文字を用いた式に表すことが目標になる。その後，多様な考え方を基に表された式が，すべて一つの式になることを確認しなければならない。例えば，正方形の数が 10 個のように具体的な数であるとき，多様に表された式が同じ計算結果になることを確認できるのに対し，文字で表された式は，変形の仕方が分からないと見かけ上はすべて異なる式である。そこで，授業の展開として，具体的な数による確認をした上で，文字で表された式も同じ式になるはずだという予想に基づき，どのように計算したらよいかを考える。

Ｔ：マッチ棒の問題で正方形の個数を x 個にしたときに，みんなの考えは次のような式で表すことができました。

①$3\times x+1$　　②$x\times 2+x+1$

③$4\times x-(x-1)$

Ｔ：x 個の場合も①～③の式の計算結果は同じになるはずです。どのように考えれば同じ式になりますか。

Ｓ：文字式では × を省くので，①は $3x+1$ です。

Ｔ：②も $3x+1$ になるのでしょうか。

Ｓ：$2x+x+1=(2+1)x+1=3x+1$

Ｔ：どのように考えたか説明してください。

Ｓ：同じ文字は同じ数だから，分配法則が使えると思います。

Ｓ：正負の数のときと同じように数直線を使えばいいと思います。

$2x+x=3x$ と予想はできても，すぐに理由を説明するのは，生徒にとって困難を伴う。文字式の表し方の規約と正負の数を計算するときに根拠に用いた分配法則や代数和の考え方が必要になるが，教師が指示を出すことを我慢し，生徒自身の表現方法に委ねたり，正負の数で学んだ場面のノートを開かせたりして，正負の数と同様に考えればよいという見通しを持たせたい。面積図を用いたり，数直線をかいたりする生徒もいるため，その考えに至る過程を評価することも大切である。生徒の表現方法を基にして，同類項をまとめられること，その背後に分配法則が用いられていること，代数和の考え方を用いて一次式の減法はひく方の式の各項の符号を変えればよいことを丁寧に確認する中で計算の仕方をまとめる。

ここでは，文字式の計算の仕方について正負の数の計算の学習過程を振り返ることで，生徒自らがその方法を見いだすようにすることに力点を置いている。加えて，正方形をつくるだけでなく，三角形や五角形，立方体などでも考えることができ，条件替えを視点に新たな問題作りをさせることで，発展的な考え方の基本を身に付ける機会にもなる。

(2)　比例と反比例のグラフの特徴

第 1 学年の教科書 p.141 に以下の問題がある。

> 問 3　$y=2x$ について，x の値が 1 ずつ増加すると，y の値はどのように変化しますか。
>
> 問 5　関数 $y=ax$ のグラフについて，比例定数 a が正の数のときと負の数のときを比べると．どんなことがいえますか。

また，グラフの特徴に関係する評価問題として，授業では次の問題を設定した。

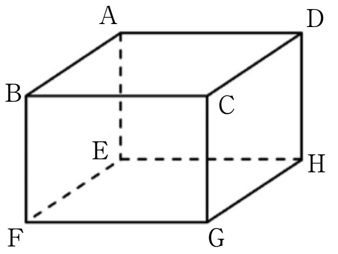
> **【問題】**　太郎さんと花子さんが，比例 $y=ax$ と反比例 $xy=a$ のグラフの特徴をまとめるために話し合いをしています。
>
> 太郎：比例のグラフをかくときは，座標平面に点をとって，直線をひけばいいよ。
>
> 花子：比例のグラフは，①<u>a の値が大きくなると直線の傾きが急になるね。</u>
>
> 太郎：反比例のグラフは，②<u>なめらかな曲線になるよ。</u>
>
> 花子：③<u>x 軸，y 軸と交わらない</u>ようにかかないといけないから，注意が必要だね。
>
> (1)　下線部①は数学的な表現として不十分である。正しい表現に直しなさい。
>
> (2)　下線部②について，反比例のグラフがなめらかな曲線になる理由を簡潔に説明しなさい。
>
> (3)　下線部③について，反比例のグラフが x 軸，y 軸と交わらない理由を簡潔に説明しなさい。

小学校で学んでいる比例のグラフは原点を通る右上がりの直線というものであった。この既習を見直す過程で，比例定数が正のときと負のときの相違点を明らかにする。中学での学習が進むにつれて，比例と反比例のグラフの相違点を変化の割合や式を視点にすることができるようになり，新たな知識を自ら見いだす活動を設定する。このような機会を設定することで，$y=ax+b$ が直線であることを，$y=ax$ に定数 b を加えただけだから直線である，変化の割合が一定だから直線であると判断したり，$y=ax^2$ が曲線になることを変化の割合が一定でないから曲線であると判断したりできるようになる。

教科書にある基礎的な問いが，後の学習のどの内容に役立つかという視点で見直すことも大切である。

(3) 空間における直線や平面の位置関係

【問題】 下の直方体で，直線 AB と交わらない辺は,直線 AB と平行であるといってよいですか。



この問題を授業で扱ったところ，AB と CG が交わらないことは多くの生徒が共有できていたが,「交わらない」から「平行である」といえるかどうかを問うと，直観的には認めたくはないが，うまく説明がつかず困ってしまう生徒や，BC を基準に AB と BC が平面 ABCD 上で 90°に交わり，CG と BC が平面 BFGC 上で 90°で交わっているため，小学校での平行の定義を当てはめる形で,「90°で交わっている」という部分のみから，平行と認めたくないが平行と認めざるを得ないという認識を持つ生徒もいた。このことから，空間で直線と直線の平行を判定する際に自然な形で「同一平面上」を意識することができる生徒が少ないことがうかがえる。

空間における直線と直線の位置関係については，平面における直線と直線の位置関係と比較して，その違いが理解できるようにすることが必要である。平面における直線と直線の位置関係には,「交わる」と「交わらない」があり,「交わらない」ときは「平行」である。空間では，直線と直線が交わらない位置関係には「平行」に加え,「ねじれの位置」がある。特に,直線と直線が「交わる」場合と「平行」の場合には平面が決定されるが,「ねじれの位置」の場合は決定されない。この「平面」に生徒を着目させるためには，教師が生徒の直観をゆさぶるやり取り（生徒は平行と認めたくないが,平面の定義を適用して平行とみなしてよいのではないかという発問など）を行うことによって，平面における平行の定義をそのまま空間に適用してよいかどうかを考察するきっかけを与え，生徒自らが空間における直線と直線の平行が平面の定義をそのまま適用することができないために新たな条件を考えなければならないこと，また生徒自らがその定義を創れるよう支援していくことが大切である。その際，生徒の直観的，感覚的な表現をもとに，数学的な表現へと洗練し，考察を深めていく。既習の数学的な表現に直すだけでも考察を深める契機となり，その部分が焦点化されることによって新たな概念を生み出すことにもつながる。「同一平面」という表現が初めから表出されることは少なく,「たて，向き，方向，地面」という説明のための便宜的な表現を基に考察対象を説明していく過程を通して，最終的には「面」という表現に集約され,「面でつながっている」や「一つの面」という表現によって考察対象が焦点化され，空間における直線と直線の平行には「同一平面上にある」という条件が必要であることが共有されればよい。

3．おわりに

定番教材とその扱い方ということで，教科書にある問題を基に，既習内容を振り返る活動を通して，生徒自らが新たに分かることを見いだしたり，条件替えをしたり，相違点を見いだしたりすることができる事例を検討した。統合・発展といった視点を明確にした上で，既存の問題を見直していく姿勢が大切である。

第２学年

問題を発展的に捉え，新たな活動のきっかけをつかむ

赤本　純基　［北海道教育大学附属釧路中学校教諭］

１．はじめに

統合・発展の考え方を育てるためには，定番教材においても，その扱い方を工夫する必要がある。授業では，日常的に数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察する過程を遂行することを念頭に置きたい。特に，振り返りの場面で次の３点を，本時の目標によって使い分けることが大切と考える（永田，2018）。

①　なぜ問題を解決できたのかを確認する

例えば，今日の問題が解決できた理由を板書を基にしながら振り返り，まとめたり，既習内容とのつながりを考えたりできるように働きかける。

②　別の問題に適用する

例えば，今日の問題の解決過程で学んだ方法を知識として，新たな問題に活用して解決できるように働きかける。

③　問題を発展的に捉え，新たな活動のきっかけをつかむ

例えば，本時の問題を基にして，「それならば，こんなことも考えられるのでは…」と条件を変えるなどして拡げられるように働きかける。今回は，紙面の都合上，③のみの提案とする。

２．実践事例

(1)　「数と式」領域における事例

> **【問題】**　1，3，5のとき，　1＋3＋5＝9
> 13，15，17のとき，13＋15＋17＝45
> 31，33，35のとき，31＋33＋35＝99
> 連続する３つの奇数の和はどんな数になるでしょうか。

この授業の目標は,「事象の中に数量の関係を見いだし，それが成り立つ理由を，文字を使って説明することができる」である。

問題を提示し予想させると,「9の倍数になる」,「3の倍数になる」,「中央の奇数の3倍になる」などの考えが発表される。そこで,「9の倍数にいつでもなるのかな？」と問い返す。すると，教室のあちらこちらで,「ならないときがありそう…」というつぶやきが聞こえ始める。そこで,「それってどういうこと？」と問い返すと,「例えば，3，5，7のとき，和は15で成り立ちません」などの考えが引き出される。これを反例として全体で共有し，連続する３つの奇数の和がいつでも３の倍数になるのかという文脈につなげていく。

n を整数とすると，連続する３つの奇数は，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$ と表される。
それらの和は，

$$\begin{aligned}&(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)\\&=2n+1+2n+3+2n+5\\&=6n+9\\&=3(2n+3)\end{aligned}$$

$2n+3$ は整数だから，$3(2n+3)$ は３の倍数である。したがって，連続する３つの奇数の和は，３の倍数になる。

この説明が全体で共有された後，「この説明から，ほかにいえることはないかな？」と説明を振り返る。すると，$3(2n+3)$ に着目して，「中央の奇数の３倍になることも説明できたことになっている！」と感動の声が生まれる。ここで，問題の解決過程を振り返り，「連続する４つの奇数の和でも同じことがいえるのかな？」と問い，次の計算を提示する。

$$\begin{aligned}&(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)\\&=2n+1+2n+3+2n+5+2n+7\\&=8n+16\\&=4(2n+4)\end{aligned}$$

すると，「$2n+4$ って何だろう？」「さっきは，中央の奇数だったけど，今度はどこの数なのかな？」と考え始める。

S：$2n+4$ って何？
T：連続する４つの奇数ではなさそう？
S：$2n+3$ と $2n+5$ の間ってことだから，連続する４つの奇数のうち小さい方から２番目の奇数と３番目の奇数の間にある偶数だよ。
S（T）：どういうこと？
S：例えば，3，5，7，9だったら，5と7の間で，6ってことだよ。
S：なるほど！

このように，考え続けることを促し，本時の目標達成に近づけていく。

(2)「関数」領域における事例

【問題】 Ａさんは240gの郵便物を送ろうとしています。
ＡさんはＢさんが120gの郵便物を200円で送ったということを聞きました。Ａさんが送ろうとしている240gの郵便物はいくらかかるでしょうか。

この授業の目標は，「従属変数が独立変数と関数関係にあるものを弁別することができる」である。

問題を提示すると，生徒から「重さが２倍だから，料金も２倍の400円になるのではないか」という考えが引き出される。この考えが重さと料金の関係が比例の関係にあると考えていることを確認した上で，「郵便料金について調べると，次のような定形外郵便物の料金表を見つけたよ。これをもとにして考えられるかな？」と問いかけ，個人・集団思考につなげる。

個人・集団思考では，生徒から「400円と思ったけれど240円だ」という考えが引き出される。ここで，「郵便物の料金は，何が決まると決まるのかな？」と問い，郵便物の重さが決まると，料金が決まることをおさえる。

重量	50gまで	100gまで	150gまで	250gまで	500gまで	1kgまで	2kgまで	4kgまで
料金	120円	140円	200円	240円	390円	580円	850円	1150円

定形外郵便物で扱っている重量は4kgまでです。

「郵便料金は郵便物の重さと関数関係にあること」を伝え，関数関係の意味について確認する。ここで問題の解決過程を振り返り，「郵便物の重さは郵便料金と関数関係にあるといえるのかな？」と問う。すると，「さっきは，重さが決まると料金が１つ

に決まったけれど，料金が決まっても重さが1つに決まるわけではないから違う！」という発言が生徒から引き出される。

最後に，「これまでに学んできたいろいろな関係も，関数になっているか調べよう」と練習問題に取り組ませて，本時の目標達成に近づけていく。

(3) 「データの活用」領域における事例

【問題】 図のような階段で兄と弟がゲームをしています。

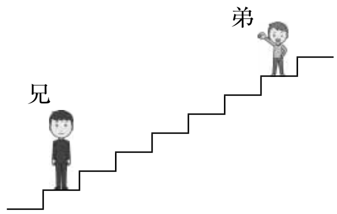
〈ルール〉

① 兄と弟がそれぞれ1回ずつさいころを投げる。

② 出た目の数だけ兄は上り，弟は下る。

③ 上にいた方が勝ちとする。

兄と弟ではどちらの方が勝ちやすいでしょうか。



この授業の目標は，「さいころを使ったゲームの公平性について，確率を用いて説明することができる」である。

問題について説明をしながらルールと図をかいた紙を黒板に張り，「兄と弟ではどちらの方が勝ちやすいだろうか？」と板書し問題を提示する。予想させると，半数程度が「同じ」と答える。そこで，「どのように確かめればよいのかな？」と問うと，実際にやってみるという声があがるので，ペアをつくって20回程度やらせる。ほとんどのペアが，兄の方が勝つ回数が多くなり，「なぜ兄の方が勝ちやすいのだろう？」という声が学級全体に広がる。個人・集団思考では，確率を用いた説明を生徒の考えをつなぎ引き出していく。

兄の勝つ確率が$\frac{21}{36}$で，弟の勝つ確率が$\frac{10}{36}$となり，兄の勝つ確率の方が大きいので，兄の方が勝ちやすいといえることを学級全体で共有した後，「兄と弟の勝ちやすさを同じにすることはできないかな？」と問い，問題の解決過程を振り返り，問題の条件を見直すように促す。

兄＼弟	1	2	3	4	5	6
1	1，①	1，②	1，③	1，④	1，5	$\boxed{1}$，6
2	2，①	2，②	2，③	2，4	$\boxed{2}$，5	$\boxed{2}$，6
3	3，①	3，②	3，3	$\boxed{3}$，4	$\boxed{3}$，5	$\boxed{3}$，6
4	4，①	4，2	$\boxed{4}$，3	$\boxed{4}$，4	$\boxed{4}$，5	$\boxed{4}$，6
5	5，1	$\boxed{5}$，2	$\boxed{5}$，3	$\boxed{5}$，4	$\boxed{5}$，5	$\boxed{5}$，6
6	$\boxed{6}$，1	$\boxed{6}$，2	$\boxed{6}$，3	$\boxed{6}$，4	$\boxed{6}$，5	$\boxed{6}$，6

生徒からは「スタートの位置を変える」「さいころの目を変える」「さいころの面の数を変える」や「結局，目の和が7になるところが引き分けになるように条件を変えればよい」などの考えが引き出される。それぞれの考えの妥当性について問いかけることで，確率を用いた説明を生徒から引き出し授業を終える。

3．おわりに

定番教材においても，本時レベルでその扱い方を工夫することで，統合・発展の考え方を育てることができるのではないだろうか。また，こうした授業の頻度を高めることが大切と考える。

[引用・参考文献]

・永田潤一郎（2018）．数学的活動の授業デザイン
・国立教育政策研究所教育課程研究センター（2019）．平成31年度全国学力・学習状況調査の調査問題
・国立教育政策研究所教育課程研究センター（2011）．平成23年度全国学力・学習状況調査の問題を活用した授業アイディア例
・石井岳文（2015）．日本数学教育学会誌臨時増刊　総会特集号97.

第３学年

統合・発展の視点で，既習事項との関わりを捉える

鈴木 誠 ［東京学芸大学附属世田谷中学校教諭］

１．はじめに

「統合・発展の考え方」は，既に移行措置期間に入っている次期学習指導要領で強調されている点のひとつである。それは，中学校数学科の目標として育てるべき資質・能力として，学習指導要領に次のように示されている。

> (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

目標では，このように示されているが，そもそも数学という教科は既習事項をもとにして統合的・発展的に扱うことができる場面が多い。従って，指導を考える際には指導する内容が既習事項のどこから来て，この先の学習にどうつながっているかを検討することが大切なこととなる。

２．事例

(1) 式の展開

展開の公式として，次の４つの公式が扱われる。

① $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
② $(x+a)^2=x^2+2ax+ab$
③ $(x-a)^2=x^2-2ax+ab$
④ $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

この公式を指導する際，①をもとにして，②～④をつくり出すように扱うことができる。①の公式で b を a にすることで，②の公式が得られる。また，得られた②の公式で，a を $-a$ に置き換えると，③の公式が得られる。さらに，①の公式で b を $-a$ にすることで，④の公式が得られる。このように①の公式から他の公式をつくっていくことで，どの公式も①の公式に帰着されることに気づく。②～④の公式をつくる場面で統合的な考え方を扱うことが難しければ，①～④の公式を指導した後に，「①～④の公式のうち１つだけ覚えるとしたらどれがいいと思う？」のような発問をするとよい。学習した４つの公式を振り返ることによって，どの公式も①の公式に統合されることに気づくであろう。

(2) ２次方程式の解き方

２次方程式の解法に，平方根の考えによるものがある。指導の順序としては，最初に $x^2=3$ などを取り上げる。これは平方根の学習の場面でも出てきているので，この方程式を満たす x は $x=\pm\sqrt{3}$ となることが分かる。

次に，$2x^2=6$ や $2x^2-6=0$ などを取り上げる。$2x^2=6$ であれば，両辺を２で割れば，最初に扱った２次方程式と同じになり，$2x^2-6=0$ であれば，-6 を移項して両辺を２で割ればよい。大切なのは，なぜそのよ

うにすればよいかをキチンと確認することである。すなわち，$x^2=3$ は解けるので，この形に帰着するために式変形していることを意識的に指導する。

そこで，次に，$(x+2)^2=3$ などを取り上げる。これも $x+2$ を１つの文字で置き換えれば，最初に解決した $x^2=3$ と同じ２次方程式になる。式を１つの文字で置き換えることは，式の展開や因数分解でも扱っているが，置き換えのアイディアが生徒から出てくることが難しいようならば，置き換えを示唆してもよいであろう。ここでも大切なのは，式をひとつのかたまりとして見て，１つの文字で置くことによって，$x^2=3$ という解決できる２次方程式にすることである。$x^2=3$ と同じと見ることができるように置き換えていることを意識づけたい。

その後，$2(x+2)^2=6$ や $2(x+2)^2-6=0$ のような２次方程式を扱う。ここまでくると，既に学習した２次方程式と同じにように解決できると気づく生徒も出てくる。そこで，$x^2+4x-3=0$ のような２次方程式を提示する。この２次方程式を解こうとしても，左辺を因数分解することはできないし，すぐに平方根の考えを使うこともできない。そこで「因数分解することはできないので，他の方法で解決したいが，どうすればよいと思う？」と発問してみる。反応がないようならば,「因数分解以外で２次方程式を解く方法にはどんなものがあったか？」と発問してみる。平方根の考えがあると答えるであろう。そこで，この２次方程式を平方根の考えを使って解くには，どのようにすればよいかを考えさせる。$x^2=k$ や $(x+a)^2=b$ の形にすれば解決できることを確認し，どのように式変形すればよいかを扱いたい。式変形の仕方をすべての生徒が見いだすことは難しいと思われるが，２次方程式の解法が平方根の考えでまとめられることには気づくであろう。

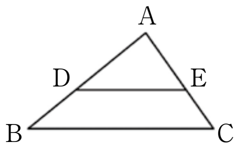
(3)　三角形と比

三角形と線分の比について，次の性質を扱う。

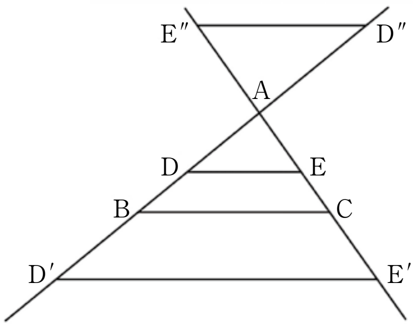
△ABC の辺 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき，次のことが成り立つ。

DE∥BC ならば

AD：AB＝AE：AC＝DE：BC



この性質が成り立つことを予想させ，証明を学級全体で取り組み，それを板書に残しておく。その後，下の図のように，点 D，E が辺 AB，AC の延長線上をそれぞれ動いても「AD：AB＝AE：AC＝DE：BC」が成り立つかを予想させる。



各自で証明に取り組ませるが，手がつかないような生徒もいる。そのような生徒には，「最初に証明したものと，同じように考えることはできないか？」と発問し，解決を促す。それでも難しい場合には，△AD′E′と△ABC，△AD″E″と△ABC に着目するようにさせる。延長上にある場合についての解決を全体で共有した後，最初の問題の証明と比較してみる。すると，どの場合も同じように証明できていることが分かる。辺上にある場合と，辺の延長上にある場合を別々に捉えるのではなく，同じ性質として統合的に見ることにつながっていく。

(4) 円周角の定理

ある弧に対する円周角が中心角の２分の１となることを予想し，それを証明する。その際には，３通りの図について証明するが，**図１**のような特別な場合をまず扱う。この図に絞る方法としては，生徒たちに弧 AB だけ決めた図を与え，いろいろな円周角 APB をかいてもらう。その図を３つの場合に分類し，どの図で証明するのが簡単そうか直観的に判断させる。すると，経験的にはほとんどの授業で，**図１**を選ぶ生徒が多くなる。そこで，この図について，まず全体で証明に取り組む。

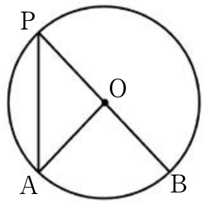


図１

△OAP が二等辺三角形であることから∠OAP＝∠OPA が成り立つことと，中心角である∠AOB が△OAP の外角になっていることを根拠に証明することになる。

その後，GeoGebra などのソフトを利用し，点 P を動かして，**図２**のように変化する様子を見せる。**図１**と**図２**を比較させ，どこが変わったかを見つけさせる。「△OAP がなくなった。」という生徒もいる。そこで，線分 OP をかき加え，△OAP をつくる。さらに，どこが変わったかを問うと，三角形が２つできているということに気づく。第２学年では，凹四角形（**図３**）について，$\angle x = \angle a + \angle b + \angle c$ となることを学習している。これを振り返り，見通しを持たせることもできる。**図２**の場合は，２つの二等辺三角形に着目することによって，証明をすることができる。

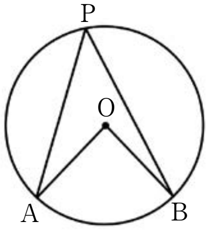


図２

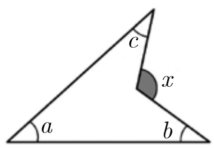


図３

図４の場合も，**図１**から**図２**への変化を読み取らせたように，**図２**と**図４**を比較し，変わったところや変わらないところに目を向けさせるようにする。**図４**では，**図２**の証明の中で利用した二等辺三角形は存在するが，△OAP と△OBP が重なる形になっている。**図２**と共通するところに目を向け，同じように証明できるという見通しを持たせて解決に取り組ませる。

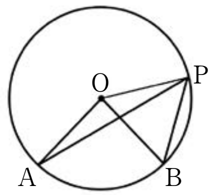


図４

図１，**図２**，**図４**について証明を終えた後，３つの証明を比較し，証明するときに利用している図形の性質を確認する。どの場合も利用しているのは，二等辺三角形の底角が等しいことと，三角形の外角の性質であることに気づく。証明で利用している性質やその性質の使い方という視点で見ると，３つの証明は同じ仕組みになっていることに気づくことができる。

３．おわりに

統合・発展の考え方を育てる教材について４つの例を示した。これ以外にも，三角形の相似条件と合同条件，（学習指導要領外の内容になるが）方べきの定理など，様々な題材が統合・発展の考え方を育てる場面として考えられる。最初にも述べたが，日常の授業を既習事項の発展として捉え，新しく学習する事柄が既習事項との関わりの中で捉えられるように指導することが肝要である。そういう意味で，教材研究をする上で，統合・発展の考え方をどのように育てるかを検討することは重要なことだと考える。

座標平面上の図形問題を題材として

吉野　茂　［東京都立三鷹中等教育学校主任教諭］

１．はじめに

教科書にはほとんど取り上げられていないが，高校入試においては国公立，私立を問わず出題されることの多い問題の１つとして，座標平面上の図形問題（関数と図形の融合問題）がある。その結果として，中学生が使用する問題集の中には，このテーマの問題が「関数」の中で取り上げられることが多いが，本来，これは解析幾何的な内容であり，中学校の学習指導要領で示されている「関数」のねらいとは目標を異にするものである。

しかし，座標平面上の図形問題が，このように高校入試の中で多く出題される事実は，解析幾何的な内容が中高の接続の面から考えれば重要な視点であることを示唆するものと考えることができるわけで，これを前向きに捉え，数学的活動に位置づけることも意味のあることではないかと思う。

本稿では，誌面の都合上その是非に深入りすることは避けることにして，生徒が実際に直面する問題において，どのような数学的活動が期待できるのかということを，筆者の実践事例を通して，考察していただけたらと思う。

２．条件を満たす座標を探そう

第２学年の１次関数の授業もそろそろ終わりに近づいた頃の演習の時間に，次のような公立高校の入試問題に取り組む機会があった。

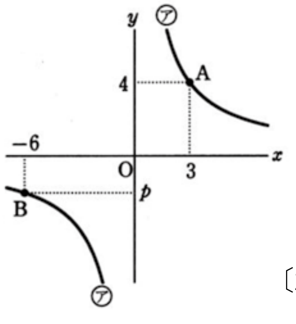
右の図のように，関数 $y=\frac{a}{x}$ …㋐ のグラフ上に２点 A(3，4)，B(−6，p) がある。

このとき，次の問いに答えなさい。

① a，p の値を求めなさい。

② ２点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

③ 原点を O とし，y 軸上に点 C をとり，△OAC をつくる。△OAC の面積と △OAB の面積が等しくなるとき，点 C の y 座標をすべて求めなさい。



〔2016 三重県〕

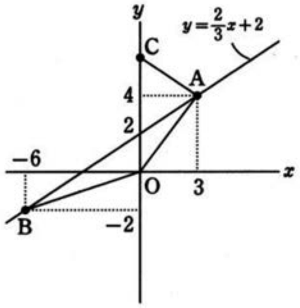
註）実際の入試問題では，グラフの図は問題文の右に印刷されている。

本稿では，問題①と②の解決がされたものとして，問題③に関する授業でのやりとりを中心に話を進めたいと思う。

まず，問題で要求していることを，座標平面上に整理する必要がある。印刷された

図に記入するのではなく，問題①，②を解くことによって得られた情報をもとに，各自のノートに**図１**のような図を記入させた。（問題③では，双曲線は必要ないので，省略している。）

図１



この後，３つの定点で囲まれた△OABの面積を求めることになるが，面積公式を直接使うことのできない面積問題の代表的な方策としては次の３つが考えられる。

Ⅰ：「対象図形の△OABを囲んで削る」

Ⅱ：「対象図形の△OABを分割・合成」

Ⅲ：「対象図形の△OABを等積変形」

このうち，タイプⅠでは，「長方形で囲む派」と「直角三角形で囲む派」に分かれたが，後者の方が無駄のない計算といえるのではないかとまとめられた。

タイプⅡについては，念のため，いくつの図形に分割したのかを尋ねると，２つと答えた生徒が大半であったが，何と３つと答えた生徒もいて面白かった。また，２つの分割についても，y切片を利用した答案とx切片を利用した答案に分かれたので，それらの解法の優劣についても議論ができた。

グループごとの話し合いの結果，３つに分割するよりも，２つに分割する方が合理的である。また，２つに分割する場合には，１次関数の式から予めわかっているのはy切片であるので，一般的にはy切片を利用する分割の方が楽なのではないかというような意見に落ち着いた。

なお，タイプⅢについては，誰からも反応がなかったので，その場では特に取り上げずに，そのまま通過していくことにした。

反応が多かったのはタイプⅡであったので，点Cの座標を以下のような流れで求めていくことになった。

〈解答〉

点Cのy座標をtとする。

直線ABとy軸との交点をDとすると

$OD=2$

$t>0$のとき，

$\triangle OAC=\triangle OAB=\triangle OAD+\triangle OBD$

であるから

$$\frac{1}{2}\times t\times 3=\frac{1}{2}\times 2\times 3+\frac{1}{2}\times 2\times 6$$

$3t=18$　よって $t=6$

よって，求めるy座標は6

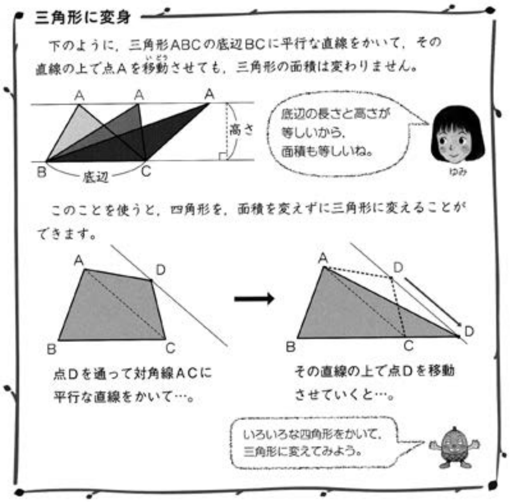
ここまで進んだところで終わりにしていた生徒が多かったが，「問題文に『すべて』とあるよ」というヒントから，原点Oについて点Cと対称な点C′もその候補であることに気づいたグループの発表から，最終的には授業に参加した生徒全員がその意味を理解することができた。

３．等積変形による解法について〈その１〉

等積変形の考え方は，教科書では第２学年の第５章「三角形と四角形」の最後の方に登場する。学習指導要領で特に示された内容ではないにも関わらず，伝統的にこの場所で扱われている。したがって，第３章「関数」を学習段階ではまだ触れることができないと考えている指導者がいるかもしれない。しかし，「等積変形」のアイデアは，小学校第５学年の教科書をみる限り，既習事項と考えてもよさそうである（次ページを参照）。

そのようなスタンスに立てば，例えば，中学校第１学年の「座標」の学習においても，「等積変形」を振り返りながら「座標」

の意味を深めていくような題材が用意できるはずである。後になって必要と思われる「知識・技能」は，機会あるごとに使っていくことも大切ではないだろうか。


三角形に変身

下のように，三角形ABCの底辺BCに平行な直線をかいて，その直線の上で点Aを移動させても，三角形の面積は変わりません。

このことを使うと，四角形を，面積を変えずに三角形に変えることができます。

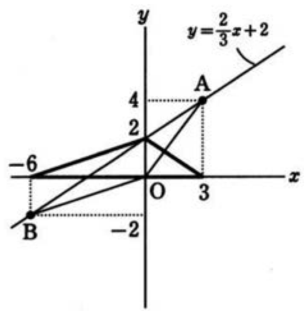
点Dを通って対角線ACに平行な直線をかいて…。

その直線の上で点Dを移動させていくと…。

（小学校算数教科書 第５学年 p.191）

今回の授業を行ったクラスでは，残念ながらノーヒントではアイディアが発表されなかったが，「等積変形」の学習を振り返り，**図２**のような変形を行うことにより△OABの面積を求めることにも成功した。この変形により，△OABの面積は面積公式１回で求められることの凄さを体感できたのは大きな収穫であった。

図２



４．等積変形による解法について〈その２〉

ここまで授業が進んだところで，ある男子生徒が発言した。「この問題は△OABの面積を求めなくても解決できるのではないか？」最初，周りの級友たちはその意味を理解できなかったが，彼の発表を聞いて，多くの生徒がそのアイディアの凄さに感動した。発表内容の概略は以下のとおり。

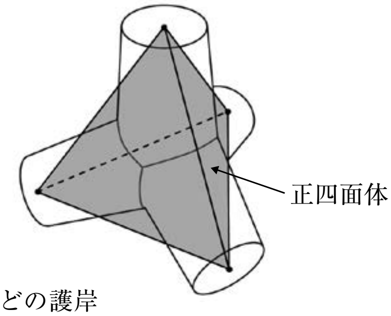
> 完成した図を見ると，OA∥BCとなっている。だから，Cの座標を求めるには，点Bを通ってOAに平行な直線と y 軸との交点を求めればよい。

面積が等しくなるようにという問題だったので，最初は面積の求め方をいろいろと工夫したのだが，この章（「１次関数」）で学んだ最新のツールを使うと，何と，面積を求めなくても解決ができるのである。

その生徒のノートの図はとてもきれいに描かれていた。自分のかいた図をとおして授業で学んだことを深めることに成功したのだなと思った。

５．おわりに

高校における解析幾何は，高校２年生が学ぶ数学Ⅱの「図形と方程式」で中心的に取り扱われる。そのねらいは，「図形に座標を入れて，関数を用いて図形の性質を探究する」ことにある。近い将来，そういった課題に取り組むことになるための準備として，中学校の数学においても，座標平面上において点や線分を用いて図形をつくったり，関数の力を借りて，その図形の性質を探究する学習をさせることは，中高の接続の視点からも大切にしてよいのではないだろうか。そんなことを考えさせられた授業のひとコマであった。



「消波ブロック」は，海岸や河川などの護岸や水制のために設けられている。代表的な「消波ブロック」である「四脚ブロック」の形状を観察すると，立体の対称性を見つけることができる。

中学数学通信　coMpass　〔2019年　秋号〕　2019年8月31日　発行

編　集：教育出版株式会社編集局
印　刷：大日本印刷株式会社

発　行：教育出版株式会社　代表者：伊東千尋
発行所：**教育出版株式会社**
〒101 - 0051　東京都千代田区神田神保町2 - 10　03-3238-6864（内容について）
URL　https://www.kyoiku-shuppan.co.jp　03-3238-6901（配送について）

地球となかよし　教育出版

なかよし宣言

わたしたちをとりまく自然や社会は，科学技術の進展や国際化，情報化，高齢化などによって，今，大きく変わろうとしています。このような社会の変化の中で，人間や地球上のあらゆる命がのびのびと生きていくためには，人や自然を大切にしながら，共に生きていこうとする優しく大きな心をもつことが求められています。

わたしたちは，この理念を「地球となかよし」というコンセプトワードに込め，社会のさまざまな場面で人間の成長に貢献していきます。

北海道支社	〒060-0003	札幌市中央区北3条西3丁目1-44 ヒューリック札幌ビル 6F TEL: 011-231-3445　FAX: 011-231-3509
函館営業所	〒040-0011	函館市本町6-7 函館第一ビルディング3F TEL: 0138-51-0886　FAX: 0138-31-0198
東北支社	〒980-0014	仙台市青葉区本町1-14-18 ライオンズプラザ本町ビル 7F TEL: 022-227-0391　FAX: 022-227-0395
中部支社	〒460-0011	名古屋市中区大須4-10-40 カジウラテックスビル 5F TEL: 052-262-0821　FAX: 052-262-0825
関西支社	〒541-0056	大阪市中央区久太郎町1-6-27 ヨシカワビル 7F TEL: 06-6261-9221　FAX: 06-6261-9401
中国支社	〒730-0051	広島市中区大手町3-7-2 あいおいニッセイ同和損保広島大手町ビル 5F TEL: 082-249-6033　FAX: 082-249-6040
四国支社	〒790-0004	松山市大街道3-6-1 岡崎産業ビル 5F TEL: 089-943-7193　FAX: 089-943-7134
九州支社	〒812-0007	福岡市博多区東比恵2-11-30 クレセント東福岡 E室 TEL: 092-433-5100　FAX: 092-433-5140
沖縄営業所	〒901-0155	那覇市金城3-8-9 一粒ビル 3F TEL: 098-859-1411　FAX: 098-859-1411